HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. B. KUMMER

Klausur Analysis II (ohne Stern), SoSem 2011
Mi, 20. 7. 2011 ; 10.00 Uhr

Vorbemerkungen: Wählen Sie aus den vorgegebenen acht Aufgaben **6** aus !
Tragen Sie am Ende in der folgenden Tabelle die Nummern der sechs Aufgaben ein, die in Ihre Klausurbewertung eingehen sollen.
Schreiben Sie auf jedes von Ihnen abzugebende Blatt (auch dieses) ihre Matrikelnummer !
Matrikelnummer:

Aufgabe						
Punkte						

Jede Aufgabe bringt maximal 6 Punkte. Viel Erfolg !

Aufgabe 1: *6 Punkte*

4+2
(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das DGLSystem

$$x_1' = x_1 + 4x_2, \quad x_2' = 2x_1 - x_2$$

(b) und eine spezielle mit $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 1 - 8$. Nullst. $\lambda = \pm 3$.
EVekt. $\lambda_1 = 3$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $V^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
EVekt. $\lambda_2 = -3$: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $V^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
Also $\quad u^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad u^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}; \quad x = u^1 - 2u^2.$

Aufgabe 2: *6 Punkte*

Man betrachte eine (2,2)- DGL $x' = Ax + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$. Die homogene DGL besitze die Lösungen

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Wie sieht die Lösung zur inhomogenen Aufgabe mit Anf. Bed. $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus ?

Standardansatz:

$$2e^{-t} = C_1' u_{1,1} + C_2' u_{2,1} = 0 + C_2' e^{-t}, \qquad 2 = C_2',$$

$$e^{-t} = C_1' u_{1,2} + C_2' u_{2,2} = C_1' e^t - C_2' e^{-t}, \qquad 1 = C_1' e^{2t} - 2, \qquad C_1' = 3e^{-2t}$$

$$C_1 = d_1 - \frac{3}{2} e^{-2t}, \qquad C_2 = d_2 + 2t,$$

Allgemein

$$x(t) = (d_1 - \frac{3}{2} e^{-2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \ (d_2 + 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (d_1 - \frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \ d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{verlangt } \ d_1 = \frac{3}{2}, \ d_2 = 1.$$

Gesuchte Funktion:

$$x(t) \ = \tfrac{3}{2}(1 - e^{-2t}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \ (1 + 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \ (1 + 2t) \ e^{-t} \\ x_2 &= \tfrac{3}{2}(e^t - e^{-t}) - (1 + 2t)e^{-t} \ = \tfrac{3}{2} e^t - \tfrac{5}{2} e^{-t} - 2te^{-t}. \end{aligned}$$

Zur Sicherheit auch noch **Probe** mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gerechnet (A muss so aussehen),

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1, \quad A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

$$Ax + b = \begin{pmatrix} -(1 + 2t)e^{-t} \\ 2(1 + 2t)e^{-t} + \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) - (1 + 2t)e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Zeile 2: $\frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) + (1 + 2t)e^{-t} + e^{-t} = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) + 2e^{-t} + 2te^{-t}$;

$$x_1'(t) = 2e^{-t} - (1 + 2t)e^{-t} = e^{-t} - 2te^{-t}. \quad ok.$$

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= \tfrac{3}{2}(e^t + e^{-t}) - 2e^{-t} + (1 + 2t)e^{-t} \\ &= \tfrac{3}{2}(e^t + e^{-t}) - e^{-t} + 2te^{-t} \\ &= \tfrac{3}{2}(e^t - e^{-t} + 2e^{-t}) - e^{-t} + 2te^{-t} \\ &= \tfrac{3}{2}(e^t - e^{-t}) + 2e^{-t} + 2te^{-t} \qquad ok. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: *6 Punkte*

3+3 P

(a) Formen Sie die Differentialgleichung

(1) $$y''' + ay'' + by = 0 \qquad (\text{ reelle Konstanten})$$

so in ein Differentialgleichungssystem um, dass nur erste Ableitungen auftreten.

(b) Warum können die Funktionen

$$y_1 = t, \quad y_2 = t^2 \quad \text{ und } \quad y_3 = \sin t$$

niemals drei Lösungen von (1) sein - bei denselben fixierten a und b ?

(a) $x_1 = y,\ x_2 = y' = x_1',\ x_3 = y'' = x_2'$: Damit geht die DGL über in

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= -bx_1 - ax_2 \end{aligned}$$

(b) Für t^2 braucht man einen dreifachen Eigenwert. Der kann hier nur reell sein. Dann gibt es aber keinen (echt) komplexen Eigenwert. Doch nur in diesem Fall könnte $\sin t$ in der Lösung auftreten.

Aufgabe 4: *6 Punkte*

3+3 P
Die DGL

$$x' = \sqrt{|x|} \qquad \text{(positive Wurzel)}$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = 0$ besitzt die Lösung $x(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.
(a) Warum ist hier der Satz von Picard und Lindelöff nicht anwenbar ?
(b) Finden Sie eine zweite, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung mit $x(0) = 0$
(Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $x(t) \geq 0$ und $t \geq 0$).

Mit $x(t) \geq 0$ verlangt die Gleich. $x' = \sqrt{x}$, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dt$,

$$2\sqrt{x} = t + C.$$

Mit $C = 0$, wird das zu $x = t^2/4$, was die Bedingung erfuellt, wenn $t \geq 0$.
Ist $t < 0$, wird damit $x' = 2t < 0$; x' hat falsches Vorzeichen, $\sqrt{|x|}$ bleibt positiv. Man braucht dann nur $x(t) = -t^2/4$ zu setzen (Leichter als $x(t) < 0$ zu diskutieren).

Aufgabe 5: *6 Punkte*

4+2 P
(a) Welche lokalen Minima besitzt die Funktion $f(x, y) = x^3 + 4x^2 + xy + y^2$?
(b) Wo liegen beliebig nahe an $(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{4})$ Punkte (x, y) mit $f(x, y) < f(\bar{x}, \bar{y})$?

(a)

$$f_x = 3x^2 + 8x + y, \quad f_y = 2y + x; \quad \Rightarrow x = -2y, \quad 12y^2 - 16y + y = y(12y - 15) = 0$$

Also verschwindet die Ableitung 1. in $x = y = 0$ und 2. in $y = \frac{5}{4}, x = -\frac{5}{2}$.

$$f_{xx} = 6x + 8, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{yy} = 2.$$

Fall 1. Dann ist H posit. definit.
Fall 2. $f_{xx} = -\frac{30}{2} + 8 = -15 + 8 = -7$ nicht posit. definit.
(b) Damit ist schon $u \mapsto f(\ (\bar{x}, \bar{y}) + (u, 0)\ )$ in $u = 0$ nicht minimal.

Aufgabe 6: *6 Punkte*

Bestimmen Sie für die geschlossene Rechteck-kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ über $(1,0)$ zu $(1,1)$, $(0,1)$ und $(0,0)$ das Integral $J = \int_K P\ dx\ + Q\ dy$ wobei
$P = yx^2 - y^3/3 + x$ und $Q = x^3/3 - xy^2 + y^5$

Wir haben

$$P_y = Q_x = x^2 - y^2.$$

Also ist das Integral Null. (Ein Gescheck als Ausgleich zum schlechten Sommer)

Aufgabe 7: *6 Punkte*

Wo ist die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z\ |z|^2$ komplex differenzierbar ?

$$f = (x+iy)(x^2+y^2) = x(x^2+y^2)\ + i\ y(x^2+y^2) = f_1 + if_2$$

$$f_{1,x} = (x^2+y^2) + 2x^2, \qquad f_{1,y} = 2xy$$

$$f_{2,x} = 2yx \qquad f_{2,y} = (x^2+y^2) + 2y^2$$

$$x^2 = y^2, \qquad xy = 0, \qquad \Rightarrow x = y = 0.$$

Aufgabe 8: *6 Punkte*

3+3 P
(a) Wie sieht die Lagrange-Bedingung für die Aufgabe aus, einen normkleinsten (Euklid. Norm) Punkt der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ zu finden, wenn

$$g(x,y) = x^2 + y + \sin(x-y) - 8 \qquad ?$$

(b) Warum gibt es hier für jede lokale Lösung einen Lagrange-Multiplikator ?

(a) Man minimiere z.B. $f = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Wer sieht, dass man so vereinfachen kann, soll nicht bestraft werden. Wer mit $f = \sqrt{x^2+y^2}$ rechnet, muss erwähnen, dass wegen Nebenbed. immer $f > 0$ gilt, die Abl. also existiert. Dann erhält man mit

$$g_x = 2x + \cos(x-y), \qquad g_y = 1 - \cos(x-y),$$

$$x + \lambda(2x + \cos(x-y)) = 0, \qquad y + \lambda(1 - \cos(x-y)) = 0.$$

(b) Probleme mit der Existenz eines Lagr.Multiplik. gibt es nur wenn $g_x = g_y = 0$.
Das heisst $1 = \cos(x-y)$, $x - y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ und $g_x = 2x + 1 = 0$.
Also folgt dann $x = -\frac{1}{2}$, $y = x - 2k\pi$. Das ergibt für die Nebenbedingung

$$x^2 + y + \sin(x-y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2k\pi \quad \neq 8 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Da eine Lösung zulässig sein soll, ist die Lagr.Bed. in jeder Lösung erfüllt.