Humboldt-Universität zu Berlin
Math.-Nat. Fakultät II
Institut für Mathematik – Angewandte Mathematik
Dr. R. Lamour - A. Backes

22. 04. 2003

Übungsaufgaben
Numerische Mathematik

Serie 2 – (Abgabe bis 08. 05. 2002)

---

1. Beweisen Sie:
Die Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ habe eine Nullstelle $x^* \in \text{int(D)}$, in deren Umgebung F' existiert und Lipschitz-stetig ist. Außerdem sei $F'(x^*)$ regulär. Dann gibt es zu jedem $\kappa, 0 < \kappa < 1$, eine Kugel $S_0 := \overline{S}(x^*, \delta_0) \subset D, \delta_0 > 0$, so daß x^* einzige Nullstelle in S_0 ist, das modifizierte Newton-Verfahren für jedes $x^0 \in S_0$ durchführbar ist und die Iterierten in S_0 bleiben, gegen x^* konvergieren und der Abschätzung $|x^{k+1} - x^*| \leq \kappa |x^k - x^*| \quad \forall k \geq 0$ genügen.

Bemerkung:
Die Iterationsvorschrift des "modifizierten Newtonverfahrens" lautet:

$$x^{k+1} := x^k - F'(x_0)^{-1} F(x^k)$$

(8 Punkte)

2. **Zusätzliches Übungsangebot** für Studenten, die **WR II** nicht gehört haben

Die Darstellung der Wurzeln eines quadratischen Polynoms

$$p(x) := x^2 + px + q$$

ist gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Bei einer der Wurzeln tritt für $0 \leq q \ll p$ durch die unterschiedlichen Vorzeichen stets Auslöschung auf.
Mit Hilfe des Satzes von Vieta ($q = x_1 x_2$) kann man die problematische Nullstelle

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

durch

$$x_1 = \frac{q}{x_2}$$

ersetzen.
Berechnen Sie mit ihrem Taschenrechner für geeignete Werte p und q x_1 mit beiden Varianten und sehen Sie sich die dazugehörigen relativen Fehler an.