

Übungsblatt 1

Algebraische Topologie SS 2009

Besprechung am 29.05.2009

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_{i-n}(X)$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$, wobei $H_k = 0$ für $k < 0$ per Definition. Zeigen Sie dafür: $H_i(X \times S^n) \cong H_i(X) \oplus H_i(X \times S^n, X \times \{x_0\})$ und $H_i(X \times S^n, X \times \{x_0\}) \cong H_{i-1}(X \times S^{n-1}, X \times \{x_0\})$ via Ausschneidung bzw. relativer Version von Mayer-Vietoris.

Aufgabe 2

Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Rand, ∂M .

(1) Zeigen Sie: (a) Ist M R -orientierbar, so ist die durch die algebraische Projektion der Kettengruppen induzierte Abbildung $H_n(M, \partial M; R) \rightarrow H_n(M, M \setminus x; R) \cong R$ für alle $x \in M \setminus \partial M$ ein Isomorphismus.

(b) Ist M nicht R -orientierbar, so ist diese Abbildung immer noch injektiv. Das Bild ist gegeben durch $\{a \in H_n(M, M \setminus x; R) \mid 2a = 0\}$.

(2) Sei ein Erzeuger von R gewählt (z.B. $1 \in \mathbb{Z}$). Sei M R -orientiert. Bezeichne $[M, \partial M]$ den Erzeuger von $H_n(M, \partial M; R)$ der unter der Abbildung in (1) auf den gewählten Erzeuger in R abbildet (die *Fundamentalklasse*). Zeige dass $[\partial M] := \partial[M, \partial M] \in H_{n-1}(\partial M; R)$ eine R -Orientierung auf ∂M induziert, wobei ∂ den Verbindungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares $(M, \partial M)$ bezeichnet.

(3) Zeigen Sie: Es gibt keine Retraktion von M auf ∂M . d.h. es gibt keine stetige Abbildung $f : M \rightarrow \partial M$ mit $f|_{\partial M} = id_{\partial M}$.

Aufgabe 3

Konstruieren Sie eine CW-Zerlegung des Raumes $S^\infty := \{\{x_k\} \mid x_k = 0 \text{ f.f.a. } k, \sum_k x_k^2 = 1\}$
Zeigen Sie: S^∞ ist kontrahierbar! Das Gleiche stimmt übrigens auch für die Einheitskugel aller reeller Folgen. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel zum Brouwerschen Fixpunktsatz: eine stetige Abbildung $f : B^\infty \rightarrow B^\infty$ auf $B^\infty := \{\{x_k\} \mid x_k = 0 \text{ f.f.a. } k, \sum_k x_k^2 \leq 1\}$, die keinen Fixpunkt besitzt. Geht dies auch auf der Einheitskugel aller reeller Folgen?

Aufgabe 4

Definieren Sie den relativen zellulären Kettenkomplex und zeigen Sie, dass seine Homologie isomorph zur relativen Homologie ist.