

Übungsblatt 3

Algebraische Topologie SS 2009

Besprechung am 19.06.2009

Aufgabe 1 [aus der Vorlesung]

Gegeben sei ein Kettenkomplex (C_n, ∂_n) freier abelscher Gruppen: $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$. Bezeichne $Z_n := \text{Ker} \partial_n$ und $B_n = \text{Im} \partial_{n-1}$. Betrachte die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1}$ der Kettenkomplexe, wobei die erste Abbildung durch die Inklusion und die zweite durch ∂_n gegeben wird. Betrachte das Dual $0 \leftarrow Z_n^* \leftarrow C_n^* \leftarrow B_n^* \leftarrow 0$ wobei wir mit $A^* := \text{Hom}(A; G)$ und mit $C^n := \text{Hom}(C_n; G)$ bezeichnen. Das ist wieder eine kurze exakte Sequenz (warum?). Zeigen Sie, dass der Verbindungshomomorphismus der zugehörigen langen exakten Sequenz durch die Einschränkungabbildung $B_n^* \leftarrow Z_n^*$ gegeben ist, d.h. dem Dual der Inklusion.

Aufgabe 2

Wir definieren das Tensorprodukt über einem abelschen Ring mit 1, $M \otimes_R N$, zweier R -Module M, N wie folgt: Sei $R\langle M \times N \rangle := \{f : M \times N \rightarrow R \mid |f^{-1}(R \setminus \{0\})| < \infty\}$ der von der Menge $M \times N$ frei erzeugte R -Modul. Bezeichne $\delta_{m,n}$ das Element darin, dass $(m, n) \in M \times N$ entspricht, d.h. $\delta_{m,n}(x, y) = 1$ für $(x, y) = (m, n)$ und 0 sonst. Sei nun mit $T_R(M, N)$ das Untermodul von $R\langle M \times N \rangle$ bezeichnet, dass erzeugt wird durch die Teilmenge $\{(\delta_{m+m',n} - \delta_{m,n} - \delta_{m',n}); (\delta_{m,n+n'} - \delta_{m,n} - \delta_{m,n'}); (\delta_{rm,n} - r\delta_{m,n}); (\delta_{m, rn} - r\delta_{m,n}) \mid m, m' \in M, n, n' \in N, r \in R\}$. Dann sei $M \otimes_R N := R\langle M \times N \rangle / T_R(M, N)$.

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

- (1) $(M \oplus M') \times_R N \cong M \otimes_R N \oplus M' \otimes_R N$
- (2) Sei $f : M \times N \rightarrow W$ eine R -bilineare Abbildung. Dann gibt es genau eine R -lineare Abbildung $f' : M \otimes_R N \rightarrow W$, so dass $f' \circ (p|_{M \times N}) = f$ wobei $p : R\langle M \times N \rangle \rightarrow M \otimes_R N$ die natürliche Projektion bezeichne.
- (3) $M \otimes_R N$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft (2).
- (4) $(M \otimes_R N) \otimes_R K \cong M \otimes_R (N \otimes_R K)$.
- (5) $M \otimes_R R \cong M$, $M \otimes_R \mathbf{0} \cong \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{0}$ das triviale R -Modul bezeichne.

Berechnen Sie:

- (5) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
- (6) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
- (7) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3

(1) Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von freien (d.h. frei erzeugten) abelschen Gruppen und G eine beliebige abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass dann $0 \leftarrow \text{Hom}(A, G) \leftarrow \text{Hom}(B, G) \leftarrow \text{Hom}(C, G) \leftarrow 0$ ebenfalls eine kurze exakte Sequenz ist. Zusatz: Zeigen Sie dasselbe für $0 \rightarrow A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$.

(2) Zeigen Sie weiterhin: Ist $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt und A, B freie abelsche Gruppen, so sind $\text{Hom}(A, G) \leftarrow \text{Hom}(B, G) \leftarrow \text{Hom}(C, G) \leftarrow 0$ und $A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$ exakt.

(3) Zeigen Sie: Jede abelsche Gruppe C besitzt eine freie Auflösung $0 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow C \rightarrow 0$.

Definieren jetzt $\text{Ext}(C; G) := \text{Coker}(\text{Hom}(A, G) \leftarrow \text{Hom}(B, G))$ und $\text{Tor}(C, G) := \text{Ker}(A \otimes G \rightarrow B \otimes G)$.

Zeigen Sie:

(4) $\text{Tor}(A, B) \cong \text{Tor}(B, A)$,

(5) $\text{Tor}(\oplus_i A_i, B) \cong \oplus_i \text{Tor}(A_i, B)$,

(6) $\text{Tor}(A, B) = 0$, falls A oder B torsionsfrei,

(7) $\text{Tor}(A, B) = \text{Tor}(T(A), B)$, mit $T(A) \subset A$ die Torsionsuntergruppe von A ,

(8) $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong \text{Ker}(a \in A \mapsto na \in A)$,

(9) Ist $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exakt, so gibt es eine lange exakte Sequenz $0 \rightarrow \text{Tor}(A, G) \rightarrow \text{Tor}(B, G) \rightarrow \text{Tor}(C, G) \rightarrow A \otimes G \rightarrow B \otimes G \rightarrow C \otimes G \rightarrow 0$.

Berechnen Sie:

(10) $\text{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}; \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$,

(11) $\text{Ext}(\mathbb{Q}; \mathbb{Z})$.