Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Algebraische Topologie SS 2009

Besprechung am 03.07.2009

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $Tor(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong T(A)$, wobei $T(A) \subset A$ die Torsionsgruppe von A ist. Folgern Sie, dass A torsionsfrei genau dann, wenn $Tor(A, B) = 0$ für alle B.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass wenn $H^n(X; \mathbb{Q})$ und $H^n(X; \mathbb{Z}_p)$ verschwinden für alle n und alle Primzahlen p, dann ist $H^n(X; \mathbb{Z}) = 0$ für alle n.

Aufgabe 3
(a) Sei $n > m$. Zeigen Sie, dass für jede stetige Abbildung $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^m$ die induzierte Abbildung $f^* : H^1(\mathbb{RP}^m; \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ trivial ist $f^* = 0$. Formulieren Sie ein entsprechendes Resultat für $\mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^m$.
(b) [Borsuk-Ulam]: Zeigen Sie, dass es für jede stetige Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ einen Punkt gibt mit $f(x) = f(-x)$. Benutzen Sie dafür Teil (a).

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^3$ nicht homotopie-äquivalent zu $\mathbb{RP}^2 \vee S^3$ ist, obwohl alle Kohomologie-Gruppen für beliebige Koeffizienten und sogar die Kohomologie-Ringe für Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ übereinstimmen.
(b) Zeigen Sie, dass $H^*(\mathbb{RP}^\infty; \mathbb{Z}_{2k}) \cong \mathbb{Z}_{2k}[\alpha, \beta]/(2\alpha, 2\beta, \alpha^2 - k\beta)$ ist, wobei $|\alpha| = 1$ und $|\beta| = 2$.