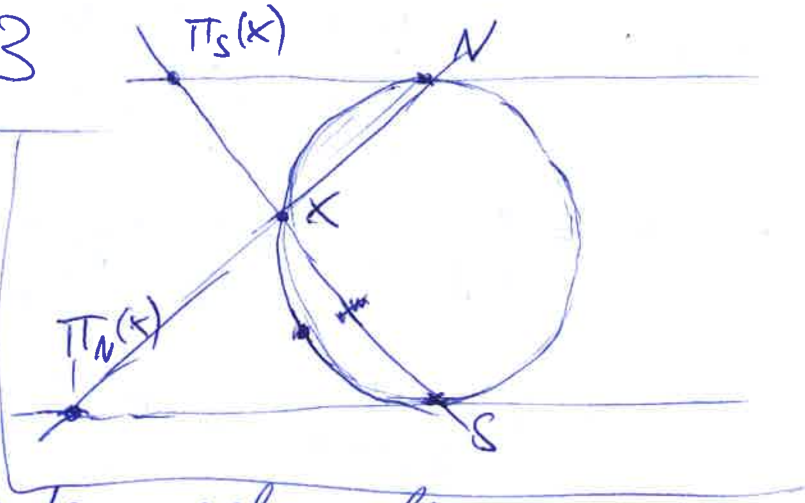
Serie 6 Aufgabe 3



a) $\underline{\underline{\Pi_N(x)}}$:

Die Gerade ist gegeben durch: $g(t) = t(N-x)+x$

Damit ist die $n+1$. Komponente gegeben als:

$$g_{n+1}(t) = t(1-x_{n+1}) + x_{n+1}.$$

Wir wissen: $g_{n+1}(t_*) \overset{!}{=} -1$, damit $g(t_*)$ Schnittpunkt ist.

$$\Rightarrow t_*(1-x_{n+1}) + x_{n+1} = -1 \iff t_* = -\frac{(1+x_{n+1})}{1-x_{n+1}}$$

Damit gilt für die i-te Komponente von Π_N, $i \in \{1,\dots,n\}$:

$$(\Pi_N(x))_i = t_*(0-x_i)+x_i = +\frac{(1+x_{n+1})}{1-x_{n+1}}x_i + x_i$$

$$= x_i\left(1+\frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}\right) = x_i\left(\frac{\cancel{1}-x_{n+1}+1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}\right) = \underline{\underline{x_i\left(\frac{2}{1-x_{n+1}}\right)}}$$

$\underline{\underline{\Pi_S(x)}}$: Berechnung komplett analog:

$$g(t) = t(S-x)+x \Rightarrow g_{n+1}(t) = t(-1-x_{n+1}) + x_{n+1},$$

$$g_{n+1}(t_*) \overset{!}{=} 1 \Rightarrow t_* = \frac{1-x_{n+1}}{-(1+x_{n+1})}$$

$$\Rightarrow (\Pi_S(x))_i = -t_* x_i + x_i = \underline{\underline{x_i\left(\frac{2}{1+x_{n+1}}\right)}} \qquad i = 1,\dots,n$$

b) Abb. ist offensichtlich bijektiv, d.h. $\exists\, \Pi_N^{-1}: \mathbb{R}^n \to S\setminus\{N\}$

Wissen: $y_i = x_i\left(\frac{2}{1-x_{n+1}}\right) \Rightarrow x_i = \frac{1}{2}y_i(1-x_{n+1})$

Wissen außerdem: $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ (Sphäre mit Radius 1)

$$\Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}y_1(1-x_{n+1})\right)^2 + \dots + \left(\tfrac{1}{2}y_n(1-x_{n+1})\right)^2 + x_{n+1}^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{y_1^2+\dots+y_n^2-4}{y_1^2+\dots+y_n^2+4} =: \frac{\|y\|-4}{\|y\|+4} = (\Pi_N^{-1}(y))_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{1}{2} y_i \left(1 - \frac{y_1^2+\dots+y_n^2-4}{y_1^2+\dots+y_n^2+4}\right) = y_i \left(\frac{4}{y_1^2+\dots+y_n^2+4}\right)$$

$$=: y_i \frac{4}{\|y\|+4} = (\Pi_N^{-1}(y))_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Π_N und Π_N^{-1} sind stetig $\Rightarrow$ Π_N Homöomorphismus

$\Rightarrow$ Π_N Karte von $S^n \setminus \{N\}$.

Analog für Π_S: $\exists\, \Pi_S^{-1}$: ~~$S^n\setminus\{S\}$~~ $\mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{S\}$

$$x_i = \frac{1}{2} y_i (1 + x_{n+1}),$$

Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{4-\|y\|}{4+\|y\|} =: (\Pi_S^{-1}(y))_{n+1}$

$$\Rightarrow (\Pi_S^{-1}(y))_i = x_i = y_i \left(\frac{4}{4+\|y\|}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

Π_S, Π_S^{-1} stetig $\to$ Homöomorphismus $\Rightarrow$ Karte.

c) Es gilt:

$$(\Pi_S \circ \Pi_N^{-1}(y))_i = y_i \left(\frac{4}{\|y\|+4}\right)\left(\frac{2}{1+\frac{\|y\|-4}{\|y\|+4}}\right) = 4\frac{y_i}{\|y\|}$$

Diese Abbildung ist definiert auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

d.h. $\Pi_S \circ \Pi_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.