

Übungsblatt 10 - Probeklausur

Elementargeometrie SS 2011

Abgabe: 29.6.2011

Die Abgabe ist freiwillig aber empfohlen. Lösen Sie die Aufgaben selbständig und nicht in der Gruppe! Messen Sie die Zeit, die Sie benötigen! Es sollten ca. 80 Minuten sein.

Rechenwege und logische Schlüsse müssen erkennbar sein. Lösungen ohne erkennbaren Rechenweg werden nicht gewertet.

Aufgabe 1.

- (a) Geben Sie eine Bedingung dafür an, dass Dreiecke ähnlich sind. Was gilt für die Längen der Seiten ähnlicher Dreiecke?
- (b) Sei h die Länge der Höhe über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, deren Fußpunkt diese in Strecken der Längen p und q zerteile. Beweisen Sie die Formel

$$h^2 = pq.$$

Aufgabe 2.

- (a) Formulieren Sie das Additionstheorem für $\sin(x + y)$. Beweisen Sie die Formel für $x, y \in [0, \infty)$ mit $x + y \leq \pi$.
- (b) Berechnen Sie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Aufgabe 3. Das folgenden Fragen lassen sich sehr elegant mit kartesischen Koordinaten lösen:

- (a) Gegeben seien zwei verschiedene Punkte P und Q in einer Ebene und eine reelle Zahl $r > |PQ|$. Beweisen Sie, dass die Menge aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Quadrate der Abstände von P und Q gleich r^2 ist, ein Kreis ist. Bestimmen Sie dessen Mittelpunkt und Radius in Abhängigkeit von P, Q und r .
- (b) Welche geometrische Figur verbirgt sich hinter der Menge aller Punkte, für die die Differenz der Quadrate der Abstände von P und Q gleich einer gegebenen reellen Zahl s ist. Bestimmen Sie die exakte Lage dieser Figur.

Aufgabe 4.

- (a) Wie lautet der Sehnensatz?
- (b) Sei $\Delta(A, B, C)$ ein gleichseitiges Dreieck. Seien P, Q die Mittelpunkte der Seiten BC bzw. AC . Seien S, T die Schnittpunkte der Geraden durch P und Q mit dem Umkreis des Dreiecks, wobei $Q \in PS$ und $P \in QT$. Fertigen Sie eine Skizze an. Beweisen Sie, dass der Punkt P die Strecke QT im Verhältnis des Goldenen Schnittes teilt, d.h. $|QP| : |QT| = |PT| : |QP|$.
Hinweis: Aus Symmetriegründen gilt $|PS| = |QT|$. Dies brauchen Sie nicht zu beweisen.