

---

Prof. Klaus Mohnke  
Institut für Mathematik  
Rudower Chaussee 25  
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 7

Elementargeometrie SS 2011

Abgabe: 8.6.2011

---

## Aufgabe 1.

Seien 5 Punkte,  $A, B, C, D, E$ , gegeben. Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $AB$ ,  $N$  der Mittelpunkt von  $BC$ ,  $O$  der Mittelpunkt von  $CD$  und  $P$  der Mittelpunkt von  $DE$ . Sei  $Q$  der Mittelpunkt von  $MO$  und  $R$  der Mittelpunkt von  $NP$ .

- (a) Fertigen Sie Skizzen an, in der  $A, B, C, D, E$  in einer Ebene liegen und jeweils ein konvexes, ein nicht konvexes sich nicht überschlagenes, sowie ein sich überschlagenes Fünfeck bilden.  
(b) Beweisen Sie, dass  $QR$  parallel zu  $EA$  ist.  
(c) Berechnen Sie das orientierte Verhältnis

$$\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{EA}}.$$

## Aufgabe 2. [Satz von Menelaos]

Sei eine Gerade  $g$  zu keiner der drei Seiten des Dreiecks  $\Delta(A, B, C)$  parallel und enthalte auch keinen der Punkte  $A, B, C$ . Seien  $D, E$  und  $F$  die drei Schnittpunkte von  $g$  mit den Geraden durch  $A$  und  $B$ ,  $B$  und  $C$  bzw.  $C$  und  $A$ . Beweisen Sie für die orientierten Verhältnisse, dass

$$\frac{\overrightarrow{DB} \overrightarrow{EC} \overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{DA} \overrightarrow{EB} \overrightarrow{FC}} = 1.$$

Hinweis: Füllen Sie die Lote von  $A, B$  und  $C$  auf  $g$  und führen Sie (Bezeichnungen für) die Lotfußpunkte ein. Wenden Sie nun den orientierten Strahlensatz dreimal an.

**Aufgabe 3.** Beweisen Sie, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate der Längen der Seiten gleich der Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen sind. Führen Sie den Beweis (a) unter Verwendung des Skalarprodukts und (b) ohne Benutzung desselben durch.

Hinweis: Schauen Sie sich für (b) den Beweis aus der Vorlesung für Teil (a) der Linearität des Skalarproduktes an, insbesondere die Konstruktion zur geometrischen Interpretation des Skalarproduktes.

## Aufgabe 4.

Zeigen Sie: Vier Punkte  $O, P, Q, R$  liegen genau dann in einer Ebene, wenn  $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$  linear unabhängig sind.

Die folgenden Aufgaben werden in den Übungen vom 30.5.-6.6. besprochen:

- Charakterisieren Sie folgende geometrische Sachverhalte analytisch, d.h. mithilfe der Vektorrechnung, des Skalarproduktes oder kartesischer Koordinaten:  $PQ$  ist parallel zu  $RS$ ;  $PQ$  steht senkrecht auf  $PR$ ;  $P, Q, R$  liegen auf einer Geraden;  $M$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $AB$ .
- Charakterisieren Sie folgende geometrische Sachverhalte analytisch:  $P, Q, R, S$  liegen auf einem Kreis; die Geraden durch  $A$  und  $B$ ,  $C$  und  $D$  bzw.  $E$  und  $F$  schneiden sich in einem Punkt.
- Zeigen Sie analytisch, dass sich die drei Seitenhalbierenden im Dreieck in einem Punkt schneiden. Versuchen Sie das Gleiche einmal mit den Höhenlinien...