Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

Abgabe 26.05.2008

Aufgabe 1
Seien u und v Vektoren in einem euklidischen Vektorraum V, und sei $\|\cdot\|$ die Norm auf V. Welche der folgenden Bedingungen sind equivalent dazu, dass u und v senkrecht aufeinander stehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\|u + \alpha v\| = \|u - \alpha v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

b) $\|u + \alpha v\| \geq \|u\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

c) $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

1 P

Aufgabe 2
Consider $\mathbb{R}^3$ with the standard scalar product, and consider the basis $(v_1; v_2; v_3)$, where $v_1 = (0, 1, 1)^t$, $v_2 = (0, 2, 0)^t$ and $v_3 = (-1, 1, 0)^t$. Use the Gram-Schmidt algorithm to find an orthonormal basis $(w_1; w_2; w_3)$ of $\mathbb{R}^3$ whose first element w_1 satisfies $Span\langle v_1\rangle = Span\langle w_1\rangle$

1 P

Aufgabe 3

a) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie: eine lineare Abbildung $P : V \to V$ ist eine orthogonale Projektion auf einen Unterraum genau dann wenn $P^2 = P$ und $P^* = P$.

b) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: die durch die Matrix $(\delta_{ij} - x_i x_j)$ gegebene Abbildung auf $\mathbb{R}^n$ ist eine orthogonale Projektion genau dann wenn $|x| = 1$.

c) Berechnen Sie die Determinante $\det(\delta_{ij} + x_i x_j)$ für beliebiges $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass durch $\langle A, B\rangle = tr(A^t \cdot B)$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $M(n, \mathbb{R})$ der reellen $n \times n$-Matrizen definiert wird. Dabei ist $tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ die *Spur* der Matrix C.

b) Zeigen Sie, dass

$$\langle x, y\rangle = x^t \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot y,$$

$x,\, y \in \mathbb{R}^3$, ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\langle x, y\rangle = x^t \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y,$$

$x,\, y \in \mathbb{R}^2$ semi-positiv (d.h. $\langle x, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$)? Kann $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ sein?

1 P

Insgesamt: **4 P**