Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Topologie Sommer 07

Abgabe von Lösungen bis 7.6.2007

Aufgabe 23
Klassifiziere alle zusammenhängenden topologischen 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (die Hausdorff sind und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen).
Einfachere Variante: Klassifiziere nur die kompakten 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.
Bemerkung: "Klassifiziere" heißt: Erstelle eine komplette Liste.

Aufgabe 24
Die folgenden Aussage wurde in der Vorlesung bewiesen. Finde einen alternativen Beweis, der analog zur restlichen Klassifikation der Flächen aus Zerschneiden und Verkleben von kompakten Gebieten mit sttückweise differenzierbarem Rand und Identifikationen von Randstücken besteht:
$T^2 \# \mathbb{R}P^2$ ist homöomorph zu $K^2 \# \mathbb{R}P^2$

Aufgabe 25 (Euler-Charakteristik)
Sei M eine Fläche versehen mit einer Triangulierung bestehend aus F 2-Simplices (Flächen), K 1-Simplices (Kanten) und E 0-Simplices (Ecken). Die *Euler-Charakteristik von M* ist definiert als

$$\chi(M) := E - K + F \qquad (*)$$

Wir werden später sehen, dass $\chi(M)$ nicht von der gewählten Triangulierung abhängt.

a) Beweise: Die Formel $(*)$ ist auch noch gültig, wenn man statt Dreiecke beliebige Polygone zulässt.

b) Berechne $\chi(M)$ für $M = S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$.

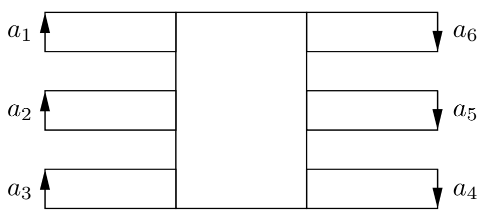
c) Seien M_1, M_2 zwei Flächen. Zeige die Formel $\chi(M_1 \sharp M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$

d) Sei $M_p = S^2 \sharp \overbrace{T^2 \sharp \dots \sharp T^2}^{p-\text{mal}}$ die orientierte Fläche vom Geschlecht $p \geq 0$ und $N_q = \overbrace{\mathbb{R}P^2 \sharp \dots \sharp \mathbb{R}P^2}^{q-\text{mal}}$ die nicht-orientierte Fläche vom Geschlecht $q > 0$. Zeige:

$$\chi(M_p) = 2 - 2p \qquad \chi(N_q) = 2 - q$$

e) Betrachte folgende Fläche mit drei verschiedenen Verklebungen der Strecken a_i:

(i) $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_6$
(ii) $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, $a_5 = a_6$
(iii) $a_1 = a_6$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_4$



Die so entstandenen Flächen sind kompakt, d.h. ihr Rand ist homöomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Kreislinien. Bestimme die Flächen, die entstehen, wenn jede Randkomponente mit einer Kreisscheibe verklebt wird.

f) Finde eine Einbettung der Flächen N_q in $\mathbb{R}^4$.
HINWEIS: Eine Einbettung von $N_q \setminus D^2$ erhält man wie in e).