Der Satz von Tychonoff

14. Juni 2007

1 Einleitung

Um den Satz von Tychonoff zu beweisen benötigen wir eine kurze Vorbereitung. Dabei spielt das Lemma von Zorn eine wichtige Rolle.

Definition 1.1 (Filter und Ultrafilter)**.** Sei X eine Menge. Eine Menge $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von X heißt *Filter*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $F_1, F_2 \in \mathfrak{F} \quad \Rightarrow F_1 \bigcap F_2 \in \mathfrak{F}$
2. $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$
3. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

Maximale Filter nennt man *Ultrafilter* (natürlich bzgl. der Inklusion).

Lemma 1.2. *Jeder Filter $\mathfrak{F}$ ist in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Wende das Lemma von Zorn auf die Menge $\{\mathfrak{G} | \mathfrak{G}$ ist ein Filter mit $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}\}$ an. □

Definition 1.3. (Filterkonvergenz) Sei X ein topologischer Raum. Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf X heißt *konvergent gegen $a \in X$*, falls jede Umgebung von a zu $\mathfrak{F}$ gehört.

Lemma 1.4. *Sei X eine Menge. Ist $\mathfrak{F}$ ein Ultrafilter auf X und $A \subset X$ eine Teilmenge, so gehört von den beiden Teilmengen A und $X \setminus A$ genau eine zu $\mathfrak{F}$.*

Beweis. Offensichtlich können nicht beide zu $\mathfrak{F}$ gehören, weil ihr Durchschnitt leer ist. Ferner muß mindestens eine von beiden nicht leeren Durchschnitt haben mit jeder der Filtermengen, denn sonst gäbe es eine Filtermenge außerhalb A und eine außerhalb $X \setminus A$ und deren Durchschnitt wäre also leer. O.B.d.A erfülle A diese Eigenschaft. Dann bildet offenbar die Menge aller Obermengen aller Durchschnitte $A \bigcap F, F \in \mathfrak{F}$ ein $\mathfrak{F} \bigcup \{A\}$ enthaltender Filter und aus der Maximalität von $\mathfrak{F}$ folgt $A \in \mathfrak{F}$. □

2 Der Beweis

Satz 2.1. *(Satz von Tychonoff; 1930) Ist $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie kompakter topologischer Räume, so ist der Produktraum $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ (mit der gewöhnlichen Produktraumtopologie) auch kompakt.*

Beweis. Der Beweis besteht aus 3 Teilen: In dem ersten zeigen wir dass die Subbasis $\mathfrak{B} := \{\pi_\lambda^{-1}(U_\lambda)|\lambda \in \Lambda, U_\lambda \subset X_\lambda \text{ offen}\}$ die Eigenschaft hat, dass jede Überdeckung von X durch Mengen aus $\mathfrak{B}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Diese Eigenschaft wird uns helfen in dem zweiten Teil zu zeigen, dass jeder Ultrafilter auf X konvergiert, woraus wir wiederum im dritten und letzten Teil schließen werden dass X kompakt ist.

1. Sei $\mathfrak{B}$ wie oben definiert. Elemente aus $\mathfrak{B}$ wollen wir im folgenden Zylinder nennen. Sei $\mathfrak{U}$ eine Überdeckung von X durch Zylinder. Angenommen, $\mathfrak{U}$ habe keine endliche Teilüberdeckung. Dann gibt es in jedem Faktor X_λ mindestens einen Punkt x_λ, dessen "Koordinatenebene" $\pi_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{U}$ überdeckt wird. Denn eine Koordinatenebene, die von endlich vielen Zylindern aus $\mathfrak{U}$ überdeckt wird, steckt immer schon in einem dieser Zylinder, sonst überdeckten diese endlich vielen den ganzen Raum; läge aber die Koordinatenebene eines jeden Elementes aus X_λ in einem Zylinder aus $\mathfrak{U}$, so folgte aus der Kompaktheit von X_λ wieder, dass endlich viele dieser Zylinder den ganzen Raum überdeckten. Es gibt also zu jedem λ so ein x_λ wie behauptet. Betrachte $x := (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Dann muss x in einem Zylinder $\pi_\mu^{-1}(U_\mu)$ von $\mathfrak{U}$ liegen, in dem dann aber im Widerspruch zur Konstruktion auch die Koordinateneben $\pi_\mu^{-1}(x_\mu)$ enthalten wäre, also war die Annahme falsch und $\mathfrak{U}$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.

2. Nun zeigen wir, wie angekündigt, mit Hilfe von 1., dass Jeder Ultrafilter auf X konvergiert. Angenommen, es existierte ein nicht konvergenter Ultrafilter $\mathfrak{F}$. Zu jedem $x \in X$ können wir dann eine Umgebung $U_x \in \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{F}$ finden, denn wären alle x enthaltenden Mengen aus $\mathfrak{B}$ Elemente von $\mathfrak{F}$, so auch alle deren endlichen Durchschnitte und $\mathfrak{F}$ konvergierte gegen x (Subbasis- und Filtereigenschaften). Nach Teil 1. besitzt $(U_x)_{x\in X}$ eine endliche Teilüberdeckung: $X = U_{x_1} \bigcup \ldots \bigcup U_{x_n}$. Da die U_{x_i} nicht Elemente von $\mathfrak{F}$ sind, müssen es nach Lemma 1.3 ihre Komplemente sein. Ihr Durchschnitt ist aber leer, was den Filteraxiomen wirderspricht. Die Annahme war also falsch und jeder Ultrafilter konvergiert.

3. Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X. Angenommen, es gäbe keine endliche Teilüberdeckung. Dann ließ jede endliche Vereinigung von Überdeckungsmengen ein nichtleeres "Defizit" $X \setminus U_{i_1} \bigcup \ldots \bigcup U_{i_n}$ übrig. Die Menge der Obermengen solcher Defizite bildete dann einen Filter $\mathfrak{F}$ ($\emptyset \notin \mathfrak{F}$ ist klar, $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subset F_2 \Rightarrow F_2 \in \mathfrak{F}$ auch klar denn F_2 als Obermenge von F_1 ist auch Obermenge eines Defizites, und seien $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, mit $X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \subset F_1$ und $X \setminus \bigcup_{j=1}^m \tilde{U}_j \subset F_2$ dann folgt $F_1 \bigcap F_2 \in \mathfrak{F}$ wegen $(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \bigcap (X \setminus \bigcup_{j=1}^m \tilde{U}_j) = X \setminus (\bigcup_{i=1}^n U_i \bigcup \bigcup_{j=1}^m \tilde{U}_j) \subset F_1 \bigcap F_2$). Nach Lemma 1.2 liegt $\mathfrak{F}$ in einem Ultrafilter, den wir wieder mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen. Teil 2. liefert uns die Konvergenz von $\mathfrak{F}$ gegen ein $a \in X$. Dieses a muss in einer der Überdeckungsmengen U_{i_0} liegen, also $U_{i_0} \in \mathfrak{F}$ wegen der Konvergenz, aber $X \setminus U_{i_0} \in \mathfrak{F}$ als Defizit. Das widerspricht aber Lemma 1.3. Die Annahme war also falsch und es existiert eine endliche Teilüberdeckung und damit ist X kompakt.

□

Literatur

[1] K. Jänich; Topologie, Springer-Verlag, 1990