Wie in der Übung besprochen, ein Beispiel von einem kompakten Topologischen Raum X, der nicht folgenkompakt ist, findet man dank des Satzes von Tychonoff.

Sei also $X := [0,1]^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to [0,1]\}$, mit der Produkt- Topologie. Dann ist die Konvergenz in X die punkweise Konvergenz der entsprechenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[0,1]$. Grund:

$f_n \to f$ in X impliziert $f_n(x) \to f(x)$ weil $f(x) = \pi_x(f)$, wobei $\pi : X \to [0,1]$ die Projektion vom Produktraum X auf seine "x-Komponente" ist. Also f_n muss punktweise gegen f konvergieren. Weil die Produkt Topologie auf X die gröbste ist, damit die Projektionen π_x noch stetig sind, folgt es auch, dass eine punktweise konvergente Funktionsfolge eine in X konvergente Folge darstellt.

Nun geben wir ein Beispiel einer Folge (f_n) an, die keine punktweise konvergente Teilfolge besitzt:

Sei $f_n(x)$:=die n-te Dezimale nach der Komma von x, geteilt durch 9 (damit die Werte in $[0,1]$ sind).

Nehmen wir an, es gibt eine punktweise konvergente Teilfolge (f_{n_k}). Sei x_0 eine beliebige Zahl in $(0,1)$, ihre Dezimaldarstellung

$$x_0 := 0, a_1 a_2 \dots$$

Dann ist die die Zahl y_0 durch ihre Dezimaldarstellung

$$y_0 := 0, * \dots a_1 * \dots a_2 * \dots \in (0,1)$$

definiert, wobei die Ziffer a_k diesmal auf der Stelle n_k ist. (an allen anderen Stellen als an den $\{n_k, k \in \mathbb{N}\}$ stehen beliebige Ziffern, hier durch $*$ markiert. Zum Beispiel kann man jedes Sternchen durch 0 ersetzen).

Insbesondere können wir $x_0 := 0,10101010\dots$ angeben, dann ist $f_{n_{2k+1}}(y_0) = 1/9$ und $f_{n_{2k}}(y_0) = 0$. Das widerspricht die Konvergenz von (f_{n_k}).

Die angegebene Folge (f_n) besitzt also keine konvergente Teilfolge, d.h., X ist nicht folgenkompakt. Nach dem Satz von Tychonoff ist er aber kompakt (als Produkt von kompakten Räumen).

Bemerkung: Der Unterschied zu den Versuchen in der Übung liegt darin, dass die hier angegebene Folge über eine *überabzählbare* Menge (nämlich die irrationale Zahlen) "nicht trivial" ist (angeben die Funktionswerte nur über den ganzen oder den rationalen Zahlen reicht nicht aus!).

Eigentlich kann man mit Hilfe des Schubfach-Prinzips zeigen, dass $Y := [0,1]^{\mathbb{N}}$ folgenkompakt ist, also "kleinere" Produkte wurden kein solches Beispiel liefern:

Sei (f_n) eine Folge in Y, dann existiert eine konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}(1)\} \subset [0,1]$ (erstes Schubfach), weil $[0,1]$ folgenkompakt ist. Nennen wir $f^1_k := f_{n_k}$. Es existiert eine konvergente Teilfolge $(f^1_{n_k}(2))$ von $(f^1_n(2))$, (zweites Schubfach, im ersten enthalten) und wir nennen $f^2_k := f^1_{n_k}$. (f^2_n) ist eine Teilfolge von (f^1_n), welche eine Teilfolge von (f_n) ist. Und so weiter, wir erhalten die Teil-teil-...-folge (f^k_n), so dass, $(f^k_n(k))$ konvergiert. Eigentlich konvergiert auch $(f^k_n(l))$, mit $l < k$. Am Ende sei $g_k := f^k_k$ (aus jedem Schubfach wählen wir ein Element aus). Dann konvergiert $(g_n(l))$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, weil $(g_n)_{n \geq l}$ eine Teilfolge von (f^l_n) ist.

Also hat jede Folge $(f_n) \subset A^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge, wobei A ein folgenkompakter Raum ist (hier wird von $A = [0,1]$ nur diese Eigenschaft benutzt). $A^{\mathbb{N}}$ ist dann folgenkompakt.