Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

1. Übungsblatt

1. Beim TÜV werden n Fahrzeuge überprüft. Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne A_i das Ereignis "das i-te Fahrzeug erhält die Prüfplakette". Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse durch mengentheoretische Verknüpfungen der Ereignisse A_i:
   (a) mindestens eines der n Fahrzeuge erhält keine Plakette;
   (b) kein Fahrzeug erhält eine Plakette;
   (c) genau ein Fahrzeug erhält keine Plakette;
   (d) höchstens ein Fahrzeug erhält eine Plakette.

2. Es sei $\mathscr{F}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeige, dass für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\mathscr{F}$ gilt:
   (a) $P(\varnothing) = 0$;
   (b) $A, B \in \mathscr{F}$, $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$;
   (c) $\forall\, A, B \in \mathscr{F} : \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
   (d) $\forall\, A_n \in \mathscr{F}$, $n \geqslant 1 : \; P(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} P(A_n)$ (*Subadditivität*).

   Beweise ferner, dass jede normierte, additive Mengenfunktion $Q : \mathscr{F} \to [0, 1]$ (d.h. $Q(\Omega) = 1$, $Q(A \cup B) = Q(A) + Q(B)$ für alle disjunkten $A, B \in \mathscr{F}$), die σ-stetig ist, auch σ-additiv und damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

3. Löse die folgenden Textaufgaben jeweils mit vollständiger Angabe und Begründung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellierung:
   (a) Wie viele Rosinen müssen in 500g Teig vorhanden sein, damit ein 50g-Brötchen mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit eine Rosine enthält?
   (b) Ein gewisser Chevalier de Méré wunderte sich, dass er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen $6-4-1$, $6-3-2$, $5-5-1$, $5-4-2$, $5-3-3$, $4-4-3$ und die Augensumme 12 durch ebensoviele (welche?) Kombinationen erzeugt würde. Kann diese Beobachtung als „vom Zufall bedingt“ angesehen werden oder ist die Argumentation falsch?

4. Für ganze Zahlen $N \geqslant 1$, $0 \leqslant W \leqslant N$, $0 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant w \leqslant W$ gebe $p_{N,W,n}(w)$ die Wahrscheinlichkeit an, dass bei n-fachem Ziehen (ohne Zurücklegen) aus einer Urne mit W weißen und $N-W$ schwarzen Kugeln genau w weiße Kugeln gezogen werden.

   (a) Begründe mit kombinatorischen Argumenten die Formel

   $$p_{N,W,n}(w) = \frac{\binom{N-W}{n-w}\binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}.$$

   (b) Weise anhand der Formel nach, dass $p_{N,W,n}$ eine Zähldichte auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, W\}$ ist (diese definiert die *hypergeometrische Verteilung*).

   (c) Berechne mit Hilfe dieser Formel die Wahrscheinlichkeit für k Richtige im Lotto 6 aus 49 ($0 \leqslant k \leqslant 6$).

Die Abgabe findet am Freitag, dem 20.04.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

2. Übungsblatt

1. Zu einer Tanzstunde kommen n Paare. Um für Abwechslung zu sorgen, wird jeder Dame rein zufällig einer der Herren zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird? Bestimmen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$.
   Anleitung: Sei A_k das Ereignis „Dame k wird ursprünglicher Partner zugelost“. Beweise die *Einschluss-Ausschluss-Formel*:

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{l=1}^{n} \Big((-1)^{l-1} \sum_{\{k_1,\dots,k_l\}\subseteq\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}\big(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_l}\big)\Big).$$

   Bestimme die rechte Seite z.B. mittels der Ergebnisse für Urnenmodelle.

2. Es sei $\mathcal{Z} = \{Z_i \,|\, i \in I\}$ mit einer Indexmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ eine abzählbare Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen.

   (a) Gib die kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Z})$ über Ω an, die das Mengensystem $\mathcal{Z}$ umfasst.

   (b) Bestimme mittels (a) für $\Omega = [0, 1)$

$$\mathcal{F}_n := \sigma\Big(\Big\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}) \,\Big|\, k \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}\Big\}\Big).$$

   (c) Zeige, dass $\mathcal{F} := \bigcup_{n\geqslant 1} \mathcal{F}_n$ eine Algebra über $[0, 1)$ bildet. Ist $\mathcal{F}$ auch eine σ-Algebra?

3. Es sei $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeben durch

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{[1/n,\infty)}(x).$$

   Zeige, dass es sich um die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ handelt, und berechne folgende Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}([1, \infty)),\ \mathbb{P}([1/10, \infty)),\ \mathbb{P}(\{0\}),\ \mathbb{P}((-5, 1/2)),\ \mathbb{P}(\mathbb{Q}).$$

4. Es seien $(X_k)_{k\geq 1}$ unabhängig und identisch verteilte $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X_k = 0) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$. Setze
$$Y := \sum_{k=1}^{\infty} X_k 2^{-k}.$$
   (a) Begründe, weshalb Y eine Zufallsvariable ist.
   (b) Bestimme $\mathbb{P}(Y \leq m2^{-n})$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $m = 0, 1, \ldots, 2^n$.
   (c) Schließe, dass die Verteilungsfunktion von Y mit der Verteilungsfunktion der gleichmäßigen Verteilung auf $[0,1]$ übereinstimmt (d.h. Y ist $U[0,1]$-verteilt).
   (d) Sei nun
$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} 2X_k 3^{-k},$$
   sowie
$$Z_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} 2X_k 3^{-k}.$$
   Bestimme die Verteilungsfunktion der Verteilung von Z_n für $n = 1, 2, 5$ und zeichne diese (Computereinsatz gestattet).
   Ist die Verteilungsfunktion von Z_∞ stetig / (schwach) differenzierbar?

5. *[Zusatzsatzaufgabe]*
   Ein Schatzsucher vermutet einen Schatz auf der Verbindungslinie zweier Pyramiden. Er überlegt sich folgende Strategie, um den Schatz zu finden: er gräbt zunächst rein zufällig an einem Punkt auf der Linie. Dann verfährt er iterativ: er wählt eine der beiden Pyramiden rein zufällig aus, geht die halbe Strecke (zwei Drittel der Strecke) in Richtung dieser Pyramide und gräbt; dies iteriert er bis zum Finden des Schatzes. Wird er bei beliebig langer Suche so den Schatz letztlich finden? Simuliere beide Varianten für 10000 Iterationen sowie das Intervall $[0,1]$ und zeichne jeweils einen Punkt für jeden Grabungsort. Erkläre das Ergebnis mittels Aufgabe 4. Was ergibt sich im Fall, dass der Schatz im von drei Pyramiden aufgespannten Dreieck liegt und der Schatzsucher jeweils eine der drei Pyramiden zufällig wählt?

Die Abgabe findet am Freitag, dem 27.04.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

3. Übungsblatt

1. Es sei φ_{μ,σ^2} die Dichte der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, also

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big), \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Bestimme die Extrema und Wendepunkte von φ_{μ,σ^2} und skizziere den Funktionsgraphen.

   (b) Nun sei $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Zeige für alle $\eta > 0$ die Abschätzung

$$\tfrac{\eta}{\sqrt{2\pi}(1+\eta^2)} e^{-\eta^2/2} \leqslant \int_\eta^\infty \varphi_{0,1}(x)\,dx \leqslant \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} e^{-\eta^2/2}.$$

   Anleitung: für die erste Ungleichung zeige $\int_\eta^\infty (1+x^{-2}) e^{-x^2/2} dx = \eta^{-1} e^{-\eta^2/2}$ und schließe $\eta^{-1}e^{-\eta^2/2} \leqslant (1+\eta^{-2}) \int_\eta^\infty e^{-x^2/2} dx$, für die zweite Ungleichung benutze $e^{-x^2/2} \leqslant \frac{x}{\eta} e^{-x^2/2}$ falls $x \geqslant \eta$.

   (c) Bestimme unter Verwendung von Teil (b) approximativ die Werte $\int_m^\infty \varphi_{0,1}(x)\,dx$ für $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
   freiwillig: Welche Werte liefert eine numerische Integration (beliebige Mathematik-Software)?

2. In einem Kreis vom Radius r werde „rein zufällig“ eine Sehne ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Länge dieser Sehne größer als r? Verwende folgende Zufallsbeschreibungen:

   (a) Die Sehne ist durch ihren Mittelpunkt eindeutig bestimmt. Die Lage des Mittelpunkts ist gleichmäßig in der Kreisscheibe verteilt.

   (b) Die Sehne ist durch ihre Endpunkte eindeutig bestimmt und aus Symmetriegründen wählen wir den einen Endpunkt fest. Der andere möge gleichmäßig auf dem Kreisrand verteilt sein.

   (c) Die Sehne ist durch ihren Abstand vom Kreismittelpunkt und die entsprechende Richtung eindeutig festgelegt. Aus Symmetriegründen kann die Richtung fest gewählt werden, der Abstand sei gleichmäßig auf $[0, r]$ verteilt.

3. *[Zusatzsatzaufgabe]* Betrachte den Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des unendlich oft wiederholten Münzwurfs. Es sei $\Pi_n : \Omega \to \{0,1\}^n$ die durch $\Pi_n(\omega) = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ gegebene Kooordinatenprojektion. Zeige, dass das System der *Zylindermengen*

$$\mathfrak{A} := \{\Pi_n^{-1}(A_n) \,|\, n \in \mathbb{N},\, A_n \subseteq \{0,1\}^n\}$$

eine Algebra über Ω bildet. Setze $P(\Pi_n^{-1}(A_n)) := |A_n|/2^n$ und zeige, dass P ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$ definiert. Konstruiere damit einen Wahrscheinlichkeitsraum, der den unendlich oft wiederholten Münzwurf modelliert.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 04.05.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

4. Übungsblatt

1. Es sei X eine exponential verteilte Zufallsvariable.

   (a) Zeige, dass X in folgendem Sinne *gedächtnislos* ist:
   $$\forall t, x > 0: \; P(X > x + t \,|\, X > t) = P(X > x).$$
   Erkläre diese Eigenschaft am Beispiel einer zufälligen Wartezeit.

   (b) Beweise umgekehrt, dass jede solche gedächtnislose Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}^+, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^+})$ exponential verteilt ist.

   (c) Bestimme die Verteilung einer Zufallsvariable Y auf $(\mathbb{N}_0, \mathscr{P}(\mathbb{N}_0))$, die im folgenden diskreten Sinne gedächtnislos ist:
   $$\forall m, n \in \mathbb{N}_0: \; P(Y \geqslant m + n \,|\, Y \geqslant m) = P(Y \geqslant n).$$

2. Über einen verrauschten Kanal werden binäre Ziffern versendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine '0' oder '1' übertragen werden soll, ist jeweils $0,5$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die empfangene Ziffer der versendeten entspricht, ist $0,9$.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 versendet wurde, wenn eine 1 empfangen wurde.

   (b) Es wird nun zur Sicherheit die zu übertragende Ziffer jeweils dreimal verschickt (d.h. 111 oder 000). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn 111 empfangen wurde?
   Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 übertragen werden sollte, wenn bekannt ist, dass die Summe der drei empfangenen Ziffern gleich 2 ist?

3. Beweise: Sind $(A_i)_{i \in I}$ unabhängige Ereignisse, so ist auch die Familie der erzeugten σ-Algebren $\mathscr{F}_i := \{\varnothing, \Omega, A_i, A_i^c\}$, $i \in I$, unabhängig.

4. Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse $E =$"Augensumme ergibt 7", $F =$"erster Wurf ergibt 4" und $G =$"zweiter Wurf ergibt 3". Untersuchen Sie die drei Ereignisse (E, F, G), sowie die Paare (E, F), (F, G), (E, G) auf Unabhängigkeit.
   Hinweis: Betrachten Sie $P(E|F \cap G)$.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 11.05.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

5. Übungsblatt

1. Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$.

   (a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und $m = \min(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben sind durch $F_M(x) = \prod_{i=1}^n F_i(x)$ bzw. $F_m(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_i(x))$.

   (b) Bestimmen Sie für den Fall, dass jedes X_i gleichmäßig auf $[0,1]$ verteilt ist, die Dichte von M und m. Sind M und m unabhängig?

   (c) Die Zeit bis zum Zerfall eines radioaktiven Atoms wird durch die Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$ beschrieben. Wie ist die Zeit bis zum ersten Atomzerfall in einer Probe aus N solchen Atomen verteilt?

2. Es sei $X = (X_1, \ldots, X_r)$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit Werten in $(S^r, \mathscr{P}(S^r))$, wobei S eine abzählbare Menge ist.

   (a) Beweisen Sie formal, dass die i-te Randverteilung P^{X_i} von X durch folgende Zähldichte beschrieben wird:

   $$p^{X_i}(x_i) = \sum_{x_j \in S;\, j \in \{1,\ldots,r\} \setminus \{i\}} P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r), \quad x_i \in S.$$

   (b) Wir betrachten ein Spiel mit drei Ausgängen (Gewinn, Verlust, Remis), das n-mal wiederholt wird, und bezeichnen mit $X = (X_1, X_2, X_3)$ die zufällige Anzahl der jeweiligen Spielausgänge. Erklären Sie die Modellierung von X als *Multinomial*-verteilte Zufallsvariable mit Parametern $n \geqslant 1$ und $p_1, p_2, p_3 \in [0,1]$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, d.h. für $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}_0$

   $$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3) = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} \mathbf{1}_{\{n\}}(k_1 + k_2 + k_3).$$

   Weisen Sie nach, dass für $i = 1, 2, 3$ die i-te Randverteilung P^{X_i} gerade die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, p_i)$ ist. Sind X_1, X_2 und X_3 unabhängig?

3. Simulation von Zufallsvariablen:

   (a) Es sei U eine $U([0,1])$-verteilte Zufallsvariable und F eine Verteilungsfunktion (auf $\mathbb{R}$). Weisen Sie nach, dass durch

   $$X := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geqslant U\}$$

   eine Zufallsvariable konstruiert wird, deren Verteilungsfunktion F ist.

   (b) Es seien U, V unabhängige $U([0,1])$-verteilte Zufallsvariablen. Setze $R = \sqrt{-2\log(U)}$, $X = R\cos(2\pi V)$ und $Y = R\sin(2\pi V)$. Beweisen Sie, dass X und Y unabhängige, standard-normalverteilte Zufallsvariablen sind. *Tipp:* Berechnen Sie die Dichte von R und betrachten Sie dann die Polarkoordinatentransformation $(R, V) \mapsto (X, Y)$ unter Verwendung des Dichtetransformationssatzes.

   (c) *freiwillig:* Simulieren Sie 100.000 unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen gemäß Methode (a) und (b). Geben Sie jeweils die Rechenzeit an und stellen Sie die Werte in einem Histogramm dar (mit Programmcode).

4. Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, auf $\{-1,1\}$ gleichverteilte Zufallsvariablen und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}_0$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist die sogenannte symmetrische Irrfahrt.

   (a) Zeigen Sie für alle festen $k \in \mathbb{N}$:

   $$P(|S_{n+k} - S_n| = k \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}) = 1.$$

   (b) Schließen Sie aus a), dass $\mathbb{P}(|S_n| \leq m \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) = 0$ für jedes feste $m \in \mathbb{N}$ und folgern Sie

   $$P(\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| = \infty) = 1.$$

   (c) Zeigen Sie $P(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty) = P(\inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty) = 1$.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 18.05.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

6. Übungsblatt

1. Es seien U_1, U_2, U_3, U_4 unabhängige gleichmäßig auf $[-1, 1]$ verteilte Zufallsvariablen.
   (a) Bestimmen Sie die Dichten von $U_1 + U_2$ und $U_1 + U_2 + U_3$.
   (b) Zeichnen Sie die Dichte von $S_n^* := \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}(U_1 + \cdots + U_n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ sowie die Dichte der Standardnormalverteilung in ein Koordinatensystem (Computereinsatz gestattet).

2. Die Gamma-Verteilung $\Gamma(\lambda, p)$ mit Parametern $\lambda, p > 0$ ist gegeben durch die Dichte
$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
   mit der Γ-Funktion $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\,dt$. Zeigen Sie, dass $(\Gamma(\lambda, p))_{p>0}$ eine Faltungshalbgruppe ist, d.h. es gilt für festes $\lambda > 0$ und alle $p_1, p_2 > 0$
$$\Gamma(\lambda, p_1) * \Gamma(\lambda, p_2) = \Gamma(\lambda, p_1 + p_2).$$
   Welche Verteilung ist das neutrale Element unter Faltung auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_R)$?

3. Seien X und Y diskrete und unabhängige Zufallsvariablen mit Zähldichten p^X und p^Y auf $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Zähldichte von $X + Y$.

4. Die Anzahl der Eier, die ein Insekt legt, sei Poisson-verteilt zum Parameter λ. Aus jedem der sich unabhängig voneinander entwickelnden Eier schlüpfe mit Wahrscheinlichkeit p eine Larve. Berechnen Sie die Verteilung der Anzahl der Larven.
   Hinweis: Bedingen Sie auf die Anzahl der gelegten Eier unter Verwendung der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 25.05.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

7. Übungsblatt

1. Es seien X eine Poiss(λ)-verteilte und Y eine Geo(p)-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ bzw. $p \in (0, 1)$.
   (a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ sowie $\mathbb{E}[Y]$.
   (b) Zeigen Sie, dass X und Y in $\mathscr{L}^q$ liegen für jedes $q > 0$.

2. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable X Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und Varianz $\mathrm{Var}(X)$ (sofern diese existieren) im Fall folgender Verteilungen:
   (a) $N(\mu, \sigma^2)$;
   (b) $\mathrm{Exp}(\lambda)$;
   (c) Cauchyverteilung (d.h. $f^X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$) und
   (d) $\chi^2(1)$-Verteilung.

3. Charakterisieren Sie die Minimalstellen $m \in \mathbb{R}$ der Funktion $d : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $d(x) := \mathbb{E}[|X - x|]$ im Fall, dass $X \in \mathscr{L}^1$ eine stetige Dichte f^X besitzt.
   Zusatzaufgabe: Verallgemeinern Sie das Resultat auf beliebige $X \in \mathscr{L}^1$.

4. Bei der Fußballeuropameisterschaft treten 16 Mannschaften mit einem Kader von jeweils 23 Spielern gegeneinander an. Es gibt von jedem Spieler ein Sammelbildchen. Am Kiosk wird ein sichtgeschützt verpacktes Bildchen für einen Cent verkauft. Wieviel wird ein Sammler im Mittel am Kiosk ausgeben, bis er von jedem Spieler (mindestens) ein Bildchen besitzt?
   Tipp: Sei N_i die Anzahl der erworbenen Bildchen, bis man von i Spielern ein Bildchen besitzt. Bestimmen Sie die Verteilung von $D_i = N_i - N_{i-1}$.
   Zusatzaufgabe: Was ergibt sich, falls sich zwei Sammler zusammentun und Bildchen tauschen?

Die Abgabe findet am Freitag, dem 01.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

8. Übungsblatt

1. Zu Daten $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ in $\mathbb{R}^2$ wird die *Regressionsgerade* $y = \hat{a}x + \hat{b}$ definiert mittels der *Methode der kleinsten Quadrate*:

$$(\hat{a}, \hat{b}) := \operatorname{argmin}_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(y_i - (ax_i + b) \Big)^2 \Big\}.$$

   (a) Bestimmen Sie $\hat{a}$ und $\hat{b}$ als Funktion der empirischen Mittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, der empirischen Varianzen $\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$, $\bar{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ und der empirischen Korrelation $\bar{\rho}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})/(\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y)$ (falls $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y > 0$).

   (b) Um die Abhängigkeit der durch Melanome (Hautkrebs) verursachten Todesfälle von der Sonneneinstrahlung zu bestimmen, wurde in den Bundesstaaten der USA die Mortalität (Todesfälle pro 10^7 Einwohner) und der Breitengrad erfasst. Bestimmen Sie aus den Daten

Staat	Delaware	Iowa	Michigan	New Hampshire	Oklahoma	Texas	Wyoming
Mort.	200	128	117	129	182	229	134
Breite	39	42	44	44	35	31	43

   die zugehörige Regressionsgerade und zeichnen Sie diese zusammen mit den Daten in ein Koordinatensystem (Computereinsatz gestattet). Welche Mortalität ist in Ohio (Breitengrad 40) in etwa zu erwarten?

2. Es sei $X \in \mathscr{L}^4$ eine Zufallsvariable mit symmetrischer Verteilung (d.h. $P(X \geqslant x) = P(X \leqslant -x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Setze $Y = X^2$. Weisen Sie nach, dass X und Y unkorreliert, aber im Allgemeinen nicht unabhängig sind. Bestimmen Sie die beste lineare Vorhersage von Y durch X (bzgl. mittlerem quadratischen Fehler). Welche ist die beste nichtlineare Vorhersage?

3. Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Zeigen Sie für $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$:

   (a) Die Zufallsvariablen $\bar{X}$ und $\bar{\sigma}^2$ sind unabhängig.
   Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\bar{X}$ und $(X_k - \bar{X})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ gemeinsam normalverteilt und unabhängig sind.

   (b) $\bar{X}$ ist $N(\mu, \sigma^2/n)$-verteilt und $\frac{n}{\sigma^2}\bar{\sigma}^2$ ist $\chi^2(n-1)$-verteilt (zur Erinnerung $\chi^2(p) = \chi^2(1)^{*p}$). Was ist der Erwartungswert von $\bar{\sigma}^2$?

4. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ sei ein zweidimensionaler Zufallsvektor (X, Y) mit stetiger Dichte $f^{(X,Y)}$ gegeben. Es gelte $f^Y(y) > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X \leqslant x \,|\, Y \in [y-h, y+h])$ für $x, y \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Zeigen Sie, dass der Grenzwert der bedingten Wahrscheinlichkeit für $h \to 0$ existiert und gleich

   $$\frac{\int_{-\infty}^x f^{(X,Y)}(\xi, y)\, d\xi}{f^Y(y)} =: F^{X|Y=y}(x)$$

   ist. Man definiert dann die *bedingte Dichte* von X gegeben $Y = y$ als

   $$f^{X|Y=y}(x) := \frac{\partial}{\partial x} F^{X|Y=y}(x) = \frac{f^{(X,Y)}(x,y)}{f^Y(y)}.$$

   (b) Bestimmen Sie $f^{X|Y=y}$, falls (X, Y) $N(\mu, \Sigma)$-verteilt ist mit $\mu \in \mathbb{R}^2$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ strikt positiv-definit. Untersuchen Sie das Verhalten von $f^{X|Y=y}$, falls die Korrelation $\rho(X, Y)$ gegen 0, +1 bzw. -1 konvergiert und interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 08.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

9. Übungsblatt

1. In einem Labor wurde eine Probe gefunden, die entweder aus einem schwach oder einem stark radioaktiven Material stammt. Um dies herauszufinden, sollen n-mal die Zeiten $T_1, \dots, T_n$ bis zum nächsten Atomzerfall gemessen werden.

   (a) Begründen Sie, warum $T_1, \dots, T_n$ näherungsweise als exponentialverteilt und unabhängig modelliert werden können. Geben Sie ein entsprechendes statistisches Modell an, um für den Intensitätsparameter λ der Exponentialverteilung die Hypothese $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_1 : \lambda = \lambda_1$ für $\lambda_0 > \lambda_1$ zu testen.

   (b) Begründen Sie, weshalb ein gleichmäßig bester Test von der Gestalt

   $$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \mathbf{1}_{[c,\infty)}(t_1 + \dots + t_n)$$

   gewählt werden kann mit einem geeigneten *kritischen Wert* $c \geqslant 0$.

   (c) Bestimmen Sie approximativ den kritischen Wert in einem solchen Test für $\lambda_0 = 10$, $\lambda_1 = 2$ und $n = 5$ zum Niveau $\alpha = 0,01$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art?
   Hinweis: Verwenden Sie $\mathrm{Exp}(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$ und Aufgabe 6.2.

2. Es seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ Zufallsvariablen, die P-fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergieren. Folgern Sie schrittweise:

   (a) $P(\exists \varepsilon > 0\ \forall n \geqslant 1 : \sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon) = 0$.

   (b) $\forall \varepsilon > 0 :\ P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{\sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon\}) = 0$.

   (c) $\forall \varepsilon > 0 :\ \lim_{n\to\infty} P(\sup_{m\geqslant n}|X_m - X| > \varepsilon) = 0$.

   (d) X_n konvergiert gegen X P-stochastisch.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 15.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

10. Übungsblatt

1. Es sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{L}^2$-integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

   (a) Es gelte $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = \mu \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Y_n) = 0$.
   Zeigen Sie, dass Y_n für $n \to \infty$ in $\mathcal{L}^2$ sowie stochastisch gegen μ konvergiert.

   (b) Folgern Sie aus Teil (a) das schwache Gesetz der großen Zahlen.

2. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ und $a \in \mathbb{R}$ eine deterministische Konstante.
   Beweisen Sie die Äquivalenz: $X_n \to a$ stochastisch $\iff$ $X_n \to a$ in Verteilung.

3. Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. Bei jeder Runde $i = 1, \ldots, n$ setzt er sein gesamtes Kapital ein, es wird eine faire Münze geworfen, und bei 'Kopf' erhält er den anderthalbfachen Einsatz zurück, bei 'Zahl' nur den halben.

   (a) Stellen Sie das Kapital nach der n-ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^n R_i$ mit geeigneten unabhängigen Zufallsvariablen R_i dar.

   (b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}[K_n] = 1$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass trotzdem $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ (fast sicher) gilt.
   Hinweis: Wende das starke Gesetz der großen Zahlen auf $\log(K_n)$ an.

4. Es seien $(X_n)_{n\geqslant 1}$ und X reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

   (a) Beweisen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{P} X$ die Existenz einer Teilfolge $(X_{n(k)})_{k\geqslant 1}$ folgt mit $X_{n(k)} \to X$ P-fast sicher für $k \to \infty$.
   Hinweis: Benutzen Sie ein Borel-Cantelli-Argument.

   (b) Für den Fall, dass X_n nicht P-stochastisch gegen X konvergiert, zeigen Sie, dass es $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(X_{n(k)})_{k\geqslant 1}$ gibt mit

$$\forall k \geqslant 1 : P(|X_{n(k)} - X| > \varepsilon) \geqslant \varepsilon.$$

   Schließen Sie weiter, dass diese Teilfolge keine Teilteilfolge $(X_{n(k(l))})_{l\geqslant 1}$ besitzt, die P-f.s. gegen X konvergiert.

   (c) Folgern Sie aus (a) und (b) die Äquivalenz: Die Folge (X_n) konvergiert P-stochastisch gegen X genau dann, wenn jede Teilfolge $(X_{n(k)})$ eine Teilteilfolge $(X_{n(k(l))})$ besitzt mit $X_{n(k(l))} \to X$ P-f.s. für $l \to \infty$.

   Freiwillig: Folgern Sie, dass fast sichere Konvergenz nicht metrisierbar ist auf Wahrscheinlichkeitsräumen, wo stochastische und fast sichere Konvergenz nicht identisch sind. Geben Sie Wahrscheinlichkeitsräume an, wo fast sichere und stochastische Konvergenz identisch sind.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 22.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

11. Übungsblatt

1. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, und X jeweils $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariablen mit Zähldichten p^{X_n} und p^X auf $\mathbb{Z}$.

   (a) Zeigen Sie: $X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} p^{X_n}(m) = p^X(m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

   (b) Untersuchen Sie $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$ auf Konvergenz in Verteilung für die Fälle $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in (0,\infty)$.

   (c) *Freiwillig:* Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a):

$$X_n \xrightarrow{d} X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{Z}} |p^{X_n}(m) - p^X(m)| = 0.$$

2. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Bernoulli-Folge zum Parameter $p \in [0,1]$, d.h. $P_p(X_n = 1) = p$, $P_p(X_n = 0) = 1-p$ und X_n, $n \in \mathbb{N}$, seien unabhängig. Wir betrachten die relativen Häufigkeiten $\hat{p}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) Begründen Sie: $\lim_{n\to\infty} \hat{p}_n = p$ P_p-f.s.

   (b) Zu vorgegebenen $\alpha, p \in (0,1)$ ist $C_{p,\alpha} > 0$ gesucht mit

$$\lim_{n\to\infty} P_p(\sqrt{n}|\hat{p}_n - p| \le C_{p,\alpha}) = 1 - \alpha.$$

   Bestimmen Sie $C_{p,\alpha}$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung bzw. der zugehörigen Quantilfunktion Φ^{-1}.

   (c) In Berlin kommen jährlich $N \approx 30000$ Babys zur Welt, davon seien k männlich. Mit einem Test der Form $\varphi(k) := \mathbf{1}_{\{|k-N/2|>c\}}$ soll die Hypothese getestet werden, dass bei Geburten Mädchen und Jungen gleich wahrscheinlich sind.
   Bestimmen Sie mittels b) den Wert c so, dass der Test in etwa das Niveau 5% besitzt. Nutzen Sie gegebenenfalls: $\Phi(0,95) \approx 0,829$, $\Phi(1,2816) \approx 0,9$, $\Phi(1,6449) \approx 0,95$, $\Phi(1,96) \approx 0,975$. Wird bei einer relativen Häufigkeit von $0,51$ die Hypothese akzeptiert oder abgelehnt?

3. Es seien X_1, X_2 zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungen P_1 und P_2 auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R})$.

   (a) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Funktionen gilt

$$\varphi^{P_1 * P_2}(u) = \varphi^{P_1}(u)\varphi^{P_2}(u), \quad \text{d.h.}$$
$$\varphi^{X_1+X_2}(u) = \varphi^{X_1}(u)\varphi^{X_2}(u), \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Betrachten Sie nun $X_i \sim \mathrm{Poiss}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i > 0$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eindeutigkeit der charakteristischen Funktion, dass $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt ist zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ und daher $(\mathrm{Poiss}(\lambda))_{\lambda>0}$ eine Faltungshalbgruppe bildet.

4. Sei φ die charakteristische Funktion einer Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^m(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeigen Sie $\varphi \in C^m(\mathbb{R})$ mit $\varphi^{(k)}(0) = i^k\,\mathbb{E}[X^k], k = 0, \dots, m$.

   (b) Bestimmen Sie mit (a) die Momente $\mathbb{E}[X^k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ im Fall $X \sim N(0, 1)$.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Funktion $r_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert mit $\sup_{u\in\mathbb{R}} |r_m(u)| \leqslant 3\,\mathbb{E}[|X|^m]$ und $r_m(u) \to 0$ für $u \to 0$, so dass gilt

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(iu)^k}{k!}\,\mathbb{E}[X^k] + \frac{(iu)^m}{m!} r_m(u).$$

Die Abgabe findet am Freitag, dem 29.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

11. Übungsblatt (Statistiker-Version)

1. Es seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, und X jeweils $\mathbb{Z}$-wertige Zufallsvariablen mit Zähldichten p^{X_n} und p^X auf $\mathbb{Z}$.

   (a) Zeigen Sie: $X_n \xrightarrow{d} X \iff \lim_{n\to\infty} p^{X_n}(m) = p^X(m)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

   (b) Untersuchen Sie $X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$ auf Konvergenz in Verteilung für die Fälle $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} np_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in (0,\infty)$.

   (c) *Freiwillig:* Zeigen Sie in Verallgemeinerung von (a):
   $$X_n \xrightarrow{d} X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{Z}} |p^{X_n}(m) - p^X(m)| = 0.$$

2. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Bernoulli-Folge zum Parameter $p \in [0,1]$, d.h. $P_p(X_n = 1) = p$, $P_p(X_n = 0) = 1-p$ und X_n, $n \in \mathbb{N}$, seien unabhängig. Wir betrachten die relativen Häufigkeiten $\hat{p}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

   (a) Begründen Sie: $\lim_{n\to\infty} \hat{p}_n = p$ P_p-f.s.

   (b) Zu vorgegebenen $\alpha, p \in (0,1)$ ist $C_{p,\alpha} > 0$ gesucht mit
   $$\lim_{n\to\infty} P_p(\sqrt{n}|\hat{p}_n - p| \le C_{p,\alpha}) = 1 - \alpha.$$
   Bestimmen Sie $C_{p,\alpha}$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung bzw. der zugehörigen Quantilfunktion Φ^{-1}.

   (c) In Berlin kommen jährlich $N \approx 30000$ Babys zur Welt, davon seien k männlich. Mit einem Test der Form $\varphi(k) := \mathbf{1}_{\{|k-N/2|>c\}}$ soll die Hypothese getestet werden, dass bei Geburten Mädchen und Jungen gleich wahrscheinlich sind.
   Bestimmen Sie mittels b) den Wert c so, dass der Test in etwa das Niveau 5% besitzt. Nutzen Sie gegebenenfalls: $\Phi(0,95) \approx 0,829$, $\Phi(1,2816) \approx 0,9$, $\Phi(1,6449) \approx 0,95$, $\Phi(1,96) \approx 0,975$. Wird bei einer relativen Häufigkeit von $0,51$ die Hypothese akzeptiert oder abgelehnt?

Definition. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, so dass $\mathbb{E}[e^{h|X|}] < \infty$ für ein $h > 0$ gilt. Dann heißt

$$m^X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}], \quad t \in [-h, h],$$

die <u>momentenerzeugende Funktion</u> von X.

Falls die momentenerzeugende Funktion m^X auf einer Umgebung von null existiert, ist die Verteilung von X eindeutig durch m^X bestimmt.

3. Es seien X_1, X_2 zwei unabhängige reellwertige Zufallsvariablen mit Verteilungen P_1 und P_2 auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_\mathbb{R})$ und es gelte $\mathbb{E}[e^{h|X_i|}] < \infty$ für ein $h > 0$ und $i = 1, 2$.

   (a) Zeigen Sie, dass für die momentenerzeugenden Funktionen gilt

   $$m^{X_1+X_2}(t) = m^{X_1}(t) m^{X_2}(t), \quad \text{d.h.}$$
   $$m^{P_1 * P_2}(t) = m^{P_1}(t) m^{P_2}(t), \quad t \in [-h, h].$$

   (b) Betrachten Sie nun $X_i \sim \text{Poiss}(\lambda_i)$ mit $\lambda_i > 0$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie unter Verwendung der Eindeutigkeit der momentenerzeugenden Funktion, dass $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt ist zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$ und daher $(\text{Poiss}(\lambda))_{\lambda > 0}$ eine Faltungshalbgruppe bildet.

4. Es sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\mathbb{E}[e^{h|X|}] < \infty$ für ein $h > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die momentenerzeugende Funktion m^X in null k-mal differenzierbar ist mit $(m^x)^{(k)}(0) = \mathbb{E}[X^k]$.

   (b) Bestimmen Sie mit (a) die Momente $\mathbb{E}[X^k]$ für $k \in \mathbb{N}_0$ im Fall $X \sim N(0, 1)$.

   (c) Zeigen Sie, dass es eine Zufallsvariable Y gibt, für die m^Y nicht existiert.

Die Abgabe findet am Freitag, dem 29.06.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.

Markus Reiß

Vorlesung *Stochastik I*
Sommersemester 2012
Humboldt-Universität zu Berlin

Probeklausur

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind: (5P)

   (a) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ besitzt eine Dichte.

   (b) Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen stochastisch unabhängig unter dem Maß P, falls $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, gilt.

   (c) Zwei Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Dichte $f^{X,Y}$ sind unabhängig genau dann, wenn zwei messbare Funktionen f^X, f^Y existieren für die $f^{X,Y}(x, y) = f^X(x) f^Y(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, gilt.

   (d) Besitzen zwei Zufallsvariablen X, Y Dichten, so besitzt auch $X + Y$ eine Dichte.

   (e) Das Minimum von zwei unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen ist wiederum exponentialverteilt.

   (f) $X_n \xrightarrow{d} X$ gilt für reellwertige Zufallvariablen genau dann, wenn für die zugehörigen Verteilungsfunktionen $\lim_{n\uparrow\infty} F^{X_n}(y) = F^X(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.

   (g) Ist $\varphi : \mathcal{X} \to [0, 1]$ ein Test, so führt $\varphi(x) = 1$ zur Annahme der Hypothese H_0.

   (h) Fast sichere Konvergenz impliziert Konvergenz in $\mathcal{L}^1$.

   (i) Sind die Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt, so gilt $\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$ fast sicher.

   (j) Für die charakteristischen Funktionen zweier unabhängiger, reellwertiger Zufallsvariablen X, Y gilt $\varphi^{X+Y}(u) = \varphi^X(u) + \varphi^Y(u), u \in \mathbb{R}$.

   (k) Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige im Lotto "6 aus 49" ist gegeben durch $\binom{49}{6}^{-1}$.

   (l) Ist B ein Ereignis der σ-Algebra $\mathcal{F}$ mit $P(B) > 0$, dann ist die Abbildung $A \longmapsto P(A|B)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der σ-Algebra $\mathcal{F}$.

2. (a) Formulieren Sie beide Teile des Lemmas von Borel-Cantelli und beweisen Sie einen davon. (3P)

   (b_{math}) *Für Mathematiker*: Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch zum Parameter 1 exponentialverteilten Zufallsvariablen. Zeigen Sie: $P[\overline{\lim}_{n\uparrow\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1] = 1$. (2P)
   Hinweis: Betrachten Sie für $\epsilon \in (-1, 1)$ die Ereignisse $A_n := \{\frac{X_n}{\ln n} \geq 1+\epsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b_{stat}) *Für Statistiker*: Folgern Sie aus dem Lemma von Borel-Cantelli, dass beim unendlich langen Münzwurf mit einer fairen Münze mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich oft Zahl auftritt. Gilt dies auch bei einer unfairen Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0,1]$ "Zahl" zeigt? (2P)

3. Es seien $N \sim \text{Poiss}(\lambda)$ eine Poisson-verteilte Zufallsvariable zum Parameter $\lambda > 0$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ identisch verteilte, reellwertige Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion φ^X. Weiter seien die Zufallsvariablen $N, X_1, X_2, \dots$ unabhängig.

   (a) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion von $Y := \sum_{n=1}^{N} X_n$ gegeben ist durch $\varphi^Y(u) = \exp\big(\lambda(\varphi^X(u) - 1)\big)$ für $u \in \mathbb{R}$.
   Hinweis: Verwenden Sie $1 = \sum_{n\geqslant 0} 1_{\{N=n\}}$. (3P)

   (b) Folgern Sie, dass $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X_1]$ gilt, falls $X_n \in \mathcal{L}^1$, $n \in \mathbb{N}$. (2P)

4. Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit der gemeinsamen Dichte

$$f^{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & \text{falls } 0 < x < y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Bestimmen Sie die Randverteilungsdichten von X und Y. Sind X und Y unkorreliert? (3P)

   (b) Bestimmen Sie die Dichten der Zufallsvariablen $U := e^X$ und $V := aX$, $a \in (0,\infty)$. (2P)

5. Ein Versicherungsunternehmen hat n gleichartige Verträge mit einjähriger Laufzeit abgeschlossen und muss für den i-ten Vertrag den zufälligen Schaden X_i begleichen. Es wird angenommen, dass die X_i unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert m und Varianz $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Als Prämie verlangt die Versicherung (gemäß dem sogenannten Varianzprinzip) jeweils $\pi = m + \lambda\sigma^2$ für ein $\lambda > 0$.

   (a) Es bezeichne R die Kapitalreserve der Versicherung, und S_n sei die Summe der Einzelleistungen X_i. Bestimmen Sie näherungsweise die Ruinwahrscheinlichkeit $P(S_n > R + n\pi)$. (2P)

   (b) Wie groß ist nach (a) die Ruinwahrscheinlichkeit für $R = 1440$, $\sigma = 40$, $\lambda = 0{,}001$ und $n = 900$? Vergleichen Sie die ermittelte Wahrscheinlichkeit mit der Schranke aus der Tschebyschev-Ungleichung. (2P)

   (c) Wie groß muss nach (a) die Anzahl der Verträge mindestens sein, damit für $R = 0$, $\sigma = 40$ und $\lambda = 0{,}001$ die näherungsweise Ruinwahrscheinlichkeit kleiner als $0{,}01$ ausfällt? (1P)

   Hinweis: Nutzen Sie Normalverteilungstabellen um Funktionswerte der Verteilungs- und Quantilfunktion der standard Normalverteilung zu bestimmen.

Abgeben darf nur, wer weniger als 50% der Punkte hat. Es werden nur die Aufgaben 2 bis 5 korrigiert. Die Abgabe findet am Freitag, dem 06.07.12, bis 9:10 Uhr vor Raum 1.226, RUD 25 statt. Die Aufgaben sind auf getrennten Blättern zu bearbeiten und mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe zu versehen.