26. Februar 2007

Flächeninhaltsbestimmung mit Planimetern

Thomas Neukirchner, Humboldt-Universität zu Berlin[1]

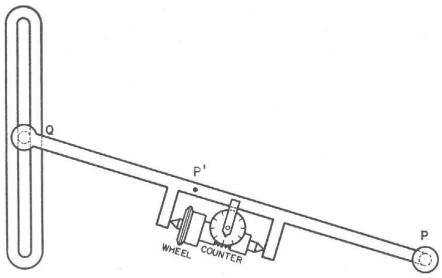


Abbildung 1: Linearplanimeter

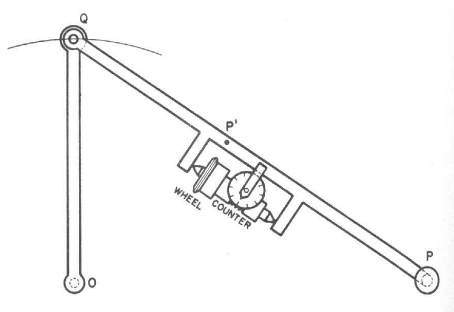


Abbildung 2: Plarplanimeter

Motivation: Unsere Aufmerksamkeit wurde auf die wundersam einfache Konstruktion der Planimeter gelenkt, da sie eine schöne Anwendung des Stoke'schen Integralsatzes darstellt. Noch vor einem Jahrzehnt sicherlich ein unverzichtbares Hilfsmittel in Geographie und Ingenieurswissenschaften, dürften diese teils ausgeklügelten Geräte vom Austerben bedroht sein und alsbald in Vitrinen verstauben. Dennoch haben wir einiges bei der Beschäftigung mit diesen geometrischen 'Analogrechnern' gelernt[2].

- Die Funktionsweise des Linearplanimeters kann man sich in einigen Fällen, z.B. der Flächenbestimmung einer aus Rechtecken zusammengesetzten Figur, schon mit Schulmathematik verdeutlichen.
- Hat man hingegen als Hilfmittel den Stoke'schen Satz zur Verfügung, so gestalten sich die Rechnungen als schöne Übungsaufgaben für den Umgang mit Formen (pull-back, Transformatinsformel, äußeres Differential, ...).
- Die Drehbewegung des Planimeterrades hängt davon ab, an welchem Punkt m des Stabes $\overline{pq}$ das Rad befestigt ist (Bez. siehe Abb. 7). Erstaunlicherweise ist die nach Umfahren des Gebietes Ω gemessene Gesamtdrehung S unabhängig von der Lage von m. Dies widerspricht im ersten Moment der Erwartung.
- Auf der Internetseite von Robert L. Foote gibt es wundervoll animierte Grafiken für alle, die gerade kein Planimeter zur Hand haben. Dort findet man auch den Beweis der *isoperimetrischen Ungleichen* mit Hilfe von Planimetern.

http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/Planimeter/Planimeter.HTM

[1]email: neukirch@mathematik.hu-berlin.de

[2]Obige Abbildung entstammen dem Buch [Murray61] aus prädigitaler Ur-Zeit.

- Linear- und Polarplanimeter sind *holonome* mechanische Systeme. Dahingegen ist das *Prytz-Planimeter* ein *nicht-holonomes* System. Seine Bewegung läßt sich als Paralleltransport eines S^1-Zusammenhangs beschreiben, der zu einem Hauptfaserbündelzusammenhang der Möbiusgruppe assoziert ist. Die Holonomie dieses Planimeteres approximiert den Flächeninhalt [Foote98].
- Die Konstruktion der Planimeter basiert auf der Messung der Projektion $\gamma' \cdot N$ eines Tangentialvektors γ' einer Kurve γ auf eine Richtung N. Die uns bekannten Präzisionsplanimeter realisieren dies durch ein Rad an der Stelle γ, dessen Achse senkrecht zu N steht. Dabei tritt ein kontrollierter Schlupf auf - das Rad schleift, wenn γ' nicht parallel zu N ist. Schaltet man hingegen eine Kugel zwischen Rad und Ebene, die längs γ gerollt wird, ist das mechanische System wieder holonom. Dieses Prinzip wird bei der mechanischen 'Computer-Maus' angewendet, um ihre Koordinaten auf der Tischfläche zu bestimmen. Gleichzeitig kann man das parallele Abrollen einer Kugel auf diese Weise veranschaulichen und damit den Paralleltransport des Levi-Civita-Zusammenhangs auf der Sphäre S^2. Hier Bilder unseres selbstgebauten Planimeters:

Abbildung 3: Seitenansicht

Abbildung 4: Draufsicht

Linear- und Polarplanimeter

Linearplanimeter: Betrachte einen Stab $\overline{pq}$ der Länge L, dessen einer Endpunkt p sich frei auf einer Geraden g bewegen kann und dessen anderer Endpunkt q entlang des Randes $\partial\Omega$ eines Gebietes Ω geführt wird. Weiter sei an einem beliebigen Punkt $m \in \overline{pq}$ des Stabes ein Rad befestigt, dessen Achse parallel zu $\overline{pq}$ ist, d.h. das Rad misst die Projektion der Bewegung von m auf die Richtung senkrecht zum Stab $\overline{pq}$. Sei S die Strecke, die das Rad misst während q einmal den Rand $\partial\Omega$ durchläuft d.h. die Strecke, die das Rad zurücklegt, würde es mit der gleichen Drehbewegung auf einer Geraden rollen. Dann gilt:

$$\boxed{S = \frac{1}{L}\, vol_2(\Omega)}$$

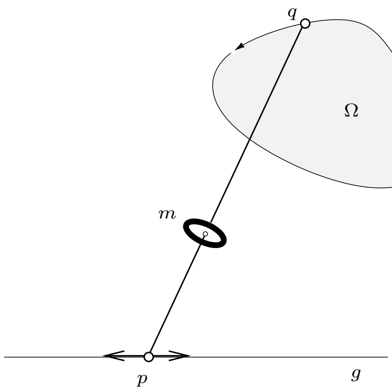


Abbildung 5: Linearplanimeter

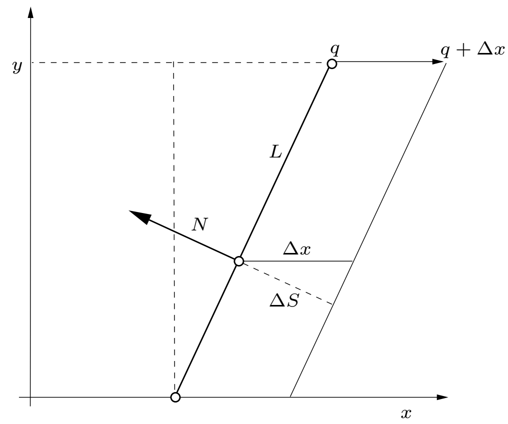


Abbildung 6: Verschiebung $q \mapsto q + \Delta x$

Beweis: Wir identifizieren die Gerade g mit der x-Achse kartesischer Koordinaten (x, y) in $\mathbb{R}^2$. Solange $|q_y| < L$ ergibt sich eine eindeutige Abbilding $m = f(q)$. In Koordinaten gilt $f(x, y) = (x - \phi(y), \lambda \cdot y) = (m_x, m_y)$ mit einer Funktion ϕ, die nur von der y-Koordinate abhängt und einer Konstanten λ, die angibt, an welcher Stelle des Stabes das Rad angebracht ist. m durchläuft die Kurve $f(\partial\Omega)$. Dabei misst das Rad das Integral der 1-Form $\sigma = N \cdot dm = N_x dm_x + N_x dm_x$, wobei N die Einheitsnormale auf $\overline{pq}$ bezeichnet, also:

$$S = \int_{f(\partial\Omega)} \sigma = \oint_{f(\partial\Omega)} N \cdot dm$$

Als nächstes berechnen wir die zurückgezogene 1-Form $f^*\sigma$. Es gilt $f^* dm_x = dx - \phi'(y) dy$ und $f^* dm_y = \lambda dy$, sowie $(N_x, N_y) = \frac{1}{L}\left(-y, \sqrt{L^2 - y^2}\right)$, da $\overline{pq} = \left(\sqrt{L^2 - y^2}, y\right)$. Insgesamt ergibt sich daraus:

$$f^*\sigma = N_x \cdot f^* dm_x + N_y \cdot f^* dm_y = -\frac{y}{L} dx + \psi(y) dy$$

mit einer Funktion ψ, die nur von y abhängt. Nach Transformationsformel und dem Satz von Stokes folgt:

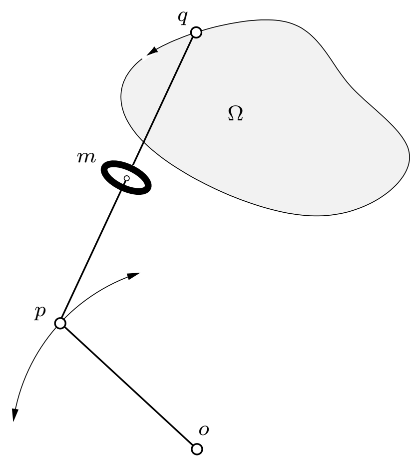
$$S = \int_{f(\partial\Omega)} \sigma = \int_{\partial\Omega} f^*\sigma = \int_\Omega d(f^*\sigma) = \int_\Omega d\big(- \tfrac{y}{L} dx + \psi(y) dy\big) = \tfrac{1}{L} \int_\Omega dx \wedge dy = \tfrac{1}{L} vol_2(\Omega)$$

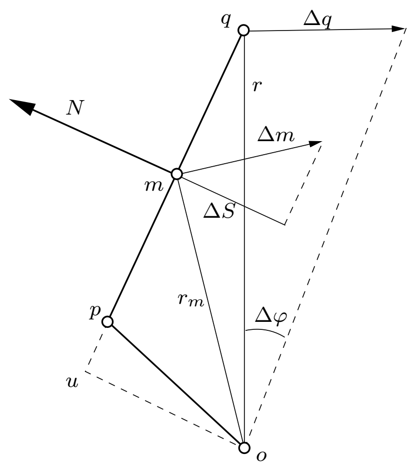
∎

In expliziter Form benötigen wir von f nur die Linearisierung df. Das lässt sich schnell und bildlich mit den aus der Physik bekannten *infinitesimalen Änderungen* ableiten. Für eine solche infinitesimale Verschiebung von q in Richtung Δx ergibt sich die Relation $\frac{\Delta S}{\Delta x} = -\frac{y}{L}$ (siehe Abb. 8). Da wir die Änderung von S bei einer infinitesimalen Änderungen von q in Richtung Δy nicht explizit benötigen, ergibt sich sofort $\sigma = dS = -\frac{1}{L} y\, dx + \psi(y) dy$.

Polarplanimeter: Im Aufbau ähnelt das Polarplanimeter dem Linearplanimeter mit dem Unterschied, dass diesmal das Stabende p sich auf einer Kreisbahn - anstelle einer Geraden - frei bewegen kann. Mechanisch wird das realisiert, indem der Stab in p an einem drehbaren Arm $\overline{op}$ befestigt ist. Mit der gleichen Messvorschrift für S wie oben, gilt wieder:

$$S = \tfrac{1}{L}\, vol_2(\Omega)$$





Beweis: Den expliziten funktionalen Zusammenhang zwischen p und m anzugeben, wäre an dieser Stelle zu mühsam. Daher verwenden wir wieder infinitesimale Größen. Wir suchen eine Darstellung von σ in Polarkoordinaten $q = (r, \varphi)$, d.h. $\sigma = f_\varphi d\varphi + f_r dr$. Da das Planimeter rotationssymmetrisch ist, hängen beide Funktionen f_φ, f_r nur von r ab. Betrachte eine infinitesimale Änderung $q \mapsto q + \Delta q$ mit $\Delta q \perp \overline{oq}$, realisiert z.B. durch eine infinitesimale Drehung $\Delta\varphi$ des gesamten Planimeters um o. Dann gilt $\Delta\varphi = \frac{\Delta q}{r} = \frac{\Delta m}{r_m}$ sowie $\frac{\Delta S}{\Delta m} = \frac{|mu|}{r_m}$. Daraus ergibt sich:

$$\Delta S = |mu|\,\frac{\Delta m}{r_m} = |mu|\,\frac{\Delta q}{r} = |mu|\,\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \sigma = dS = |mu|\,d\varphi + f_r\,dr$$

Die Funktion f_r könnte man analog durch eine infinitesimale Änderung $\Delta q \parallel \overline{oq}$ in radialer Richtung bestimmen. Das einzige, was wir von f_r jedoch brauchen werden, ist $\frac{\partial f_r}{\partial \varphi} = 0$. Es bleibt die Länge $|mu| = |mp| + |pu|$ in Abhängigkeit von r zu ermitteln, wobei für den variable Anteil $\varrho := |pu|$ gilt:

$$r^2 = |ou|^2 + |uq|^2 = |op|^2 - \varrho^2 + (\varrho + L)^2 = |op|^2 + L^2 + 2L\varrho \quad \Rightarrow \quad |mu| = \varrho + |mp| = \frac{r^2}{2L} + \lambda$$

mit einer Konstanten λ. Nun können wir wieder die Integration ausführen:

$$S = \int_{\partial\Omega} \sigma = \tfrac{1}{L} \int_{\partial\Omega} \tfrac{r^2}{2} d\varphi + \int_{\partial\Omega} \lambda d\varphi + f_r dr = \tfrac{1}{L} \int_{\Omega} r dr \wedge d\varphi = \tfrac{1}{L} vol_2(\Omega)$$

falls φ eine wohldefinierte Funktion auf Ω ist, d.h. $o \notin \Omega$. Anderfalls ist $\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} d\varphi$ die Umlaufzahl von $\partial\Omega$ um o. ∎

Es ist darauf zu achten, dass diese Argumente nur gültig sind, solange die Funktion $q \mapsto m$ eindeutig ist. Insbesondere ist es nicht erlaubt, den Stab $\overline{pq}$ vollständig um den Pol p zu drehen. Das würde einen weiteren Korrekturterm ins Spiel bringen - siehe (**??**).

Allgemeine Planimeter, Guldin'sche Regel und isoperimetrische Ungleichung

Wir betrachten den allgemeinen Fall, dass ein Stab $\overline{pq}$ der Länge L so in der Ebene geführt wird, dass seine Endpunkte p und q jeweils den Rand von Gebieten Ω_p bzw. Ω_q in positiver Richtung durchlaufen.

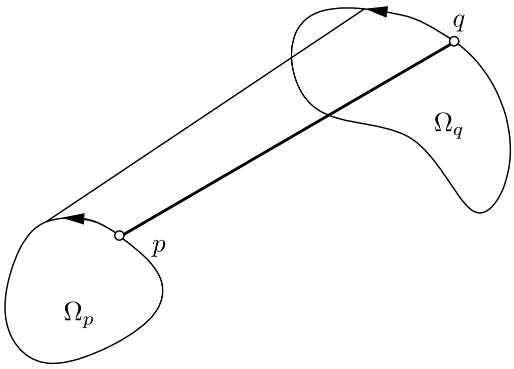


Abbildung 7: Bewegung eines Stabes in $\mathbb{R}^2$ ...

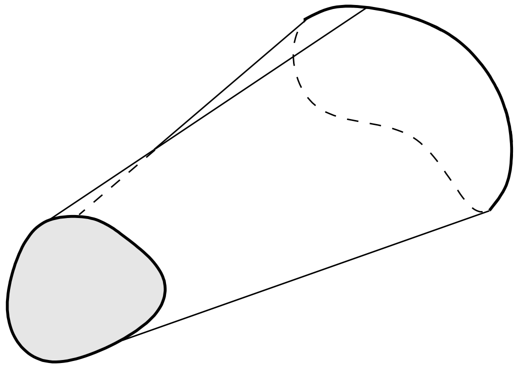


Abbildung 8: ... als Bild eines Zylinders in $\mathbb{R}^3$

Satz 1. Bezeichne A den orientierten Flächeninhalt der vom Stab $\overline{pq}$ überstrichenen Fläche. Dann gilt:

$$\boxed{A = vol_2(\Omega_q) - vol_2(\Omega_p)}$$

Beweis: Zunächst müssen wir die Begriffe und Voraussetzungen des Satzes spezifizieren. Wir setzen voraus, dass es eine glatte Abbildung Φ des Zylinders $Zyl = [0,1] \times B^2$ nach $\mathbb{R}^2$ gibt, mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(0, B^2) & = & \Omega_p \\ \Phi(1, B^2) & = & \Omega_q \\ \Phi(l, e^{i\varphi}) & = & (1-l)\cdot\Phi(0,e^{i\varphi}) + l\cdot\Phi(1,e^{i\varphi}) \qquad \forall l \in [0,1] \\ & & \text{und } |\Phi(1,e^{i\varphi}) - \Phi(0,e^{i\varphi})| = L \qquad \forall e^{i\varphi} \in \partial B^2 \end{array}$$

Man kann sich z.B. vorstellen, Φ sei die Verkettung einer Einbettung des Zylinders in $\mathbb{R}^3$ mit anschließender Projektion auf die x-y-Ebene. Die Mantellinien $[0,1] \times e^{i\varphi}$ ($e^{i\varphi} \in \partial B^2$) des Zylinders entsprechen dabei unter Φ dem Stab $\overline{pq}$ zur 'Zeiten' $\varphi \in [0, 2\pi]$. Wir fixieren die Orientierung auf dem Zylinder (bzw. die induzierte auf dem Rand ∂Zyl), so dass gilt:

$$vol_2(\Omega_p) = \int_{\Phi(0\times B^2)} dx \wedge dy \qquad vol_2(\Omega_q) = -\int_{\Phi(1\times B^2)} dx \wedge dy$$

Beim 'flachgedrückten' Zylinder $\Phi(Zyl)$ sehen wir von oben auf die Außenseite des 'Bodens' $\Phi\left(0, B^2\right) = \Omega_p$, hingegen auf die Innenseite des gegenüberliegenden 'Deckels' $\Phi\left(1, B^2\right) = \Omega_q$ Nun können wir definieren , was wir unter dem Flächeninhalt A verstehen wollen:

$$A := \int_{[0,1]\times\partial B^2} \Phi^* dx \wedge dy \tag{1}$$

Da $d\big(\Phi^* dx \wedge dy\big) = 0$, weil d und Φ^* vertauschen, erhalten wir mit dem Satz von Stokes:

$$0 = \int_{Zyl} d\big(\Phi^* dx \wedge dy\big) = \int_{\partial Zyl} \Phi^* dx \wedge dy = A + vol_2(\Omega_p) - vol_2(\Omega_q)$$

∎

Nach der Guldinschen Regel ist die vom Stab überstrichene Fläche identisch mit dem Produkt aus der Kurvenlänge des Schwerpunktes des Stabes mit dessen Länge, falls die Bewegungsrichtung des Schwerpunkts *senkrecht* auf dem Stab steht. Allgemeiner gilt:

Satz 2.[Courant34, S.452] Sei N ein Einheitsvektor senkrecht zum Stab $\overline{pq}$ und sei $m = \frac{p+q}{2}$ der Mittelpunkt des Stabes. Dann gilt:

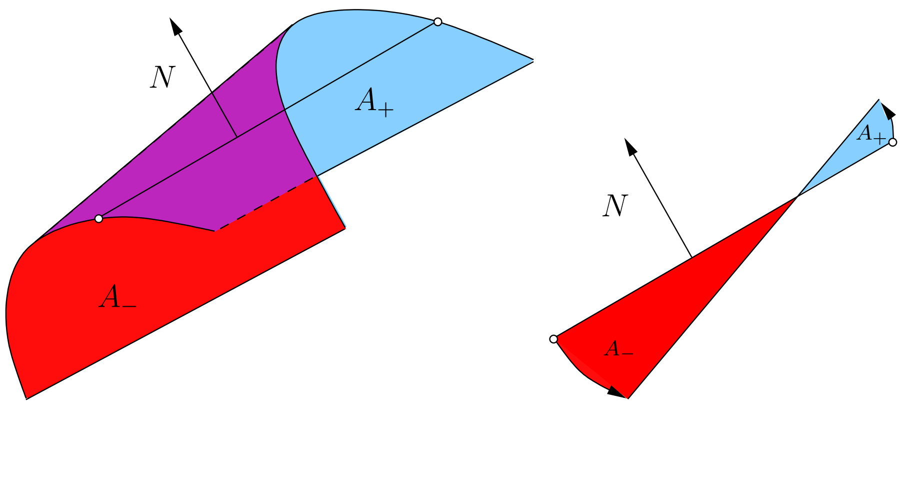
$$\boxed{A = L \int_m N \cdot dm} \tag{2}$$

Beweis: Auf dem Zylindermatel $[0,1] \times S^1$ nutzen wir die offensichtlichen Koordinaten (l, φ) und erhalten mit $\Phi(l,\varphi) = (1-l)\,p(\varphi) + l\,q(\varphi)$ sowie $N = \left(-\frac{\partial \Phi_y}{\partial l}, \frac{\partial \Phi_x}{\partial l}\right)$:

$$\begin{aligned} A = \int_{[0,1]\times S^1} \Phi^* dx \wedge dy &= \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial l}\frac{\partial \Phi_y}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial l}\frac{\partial \Phi_x}{\partial \varphi}\right) dl \wedge d\varphi \\ &= L \int_{[0,1]\times[0,2\pi]} ((1-l)p' + lq') \cdot N \\ &= L \int_{[0,2\pi]} m' \cdot N \end{aligned}$$

∎

Anhand der Formel (2) kann man sich leicht veranschaulichen, dass ein positiver (negativer) Beitrag zu A erfolgt, wenn der Stab in Richtung N $(-N)$ verschoben wird. Beschreibt der Stab hingegen eine Drehbewegung um seinen Mittelpunkt kommt insgesamt nichts zu A hinzu:



Die beiden im ersten Teil beschriebenen Planimeter lassen sich nun wie folgt erklären: Nach Konstruktion ist dafür gesorgt, dass das Gebiet Ω_p zu einer Kurve degeneriert - im Fall des Linearplanimeters zu einer Geraden und im Fall des Polarplanimeters zu einem Kreis - so dass der Flächeninhalt von Ω_p verschwindet. Ferner ist die Grösse S, die das Rad misst, nichts anderes als das Integral über die Normalkomponente der Bewegung des Punktes m auf dem Stab, also nach Satz 1 und 2:

$$L\,S = A = vol_2(\Omega_q) - vol_2(\Omega_p) = vol_2(\Omega_q) \tag{3}$$

Noch zu klären bleibt, warum m nicht notwendigerweise der Mittelpunkt von $\overline{pq}$ sein muss. Sei dazu ϑ der Winkel des Stabes $\overline{pq}$ zu einer festen Richtung in der Ebene. Dann gilt:

$$Ld\vartheta = (dq - dp) \cdot N$$

denn aus $N \cdot (q-p) = 0$ folgt durch ableiten $N \cdot (dq - dp) = dN \cdot (p-q) = Ld\vartheta$. Ein beliebiger Punkt auf dem Stab $\overline{pq}$ kann dargestellt werden als Summe $\gamma = \frac{q+p}{2} + \lambda \frac{q-p}{2}$ mit $\lambda \in (-1,1)$. Dann ergibt das Integral über die Normalkomponente von γ':

$$\begin{aligned} S = L \int N \cdot d\gamma &= L \int N \cdot \frac{dq+dp}{2} + \lambda L \int \frac{dq-dp}{2} \cdot N \\ &= A + \lambda \frac{L^2}{2} \int d\vartheta \end{aligned} \tag{4}$$

Das letzte Integral kommt beim Planimeter aber nur zum tragen, wenn der Stab $\overline{pq}$ sich während der Umfahrung von Ω_q insgesamt gedreht hat. Man überlege sich, wann dies beim Linear- und Polarplanimeters der Fall ist.

Isoperimetrische Ungleichung: Das Planimeterrad sei nun im Punkt q des Stabes $\overline{pq}$ befestigt. Ferner fordern wir, dass sich der Stab während der Umfahrung von Ω_q genau einmal in positiver Richtung dreht. Dazu darf $L = |pq|$ nicht größer als der Umkreisradius von Ω_q sein. Dann folgt aus (4) mit $\lambda = 1$:

$$L\,S = \tfrac{A}{L} + L\pi \qquad \text{d.h.} \qquad S^2 - 4\pi A = \left(\tfrac{A}{L} - L\pi\right)^2 \geq 0 \tag{5}$$

Schliesslich ist der Umfang $vol_1(\partial\Omega_q)$ größer als S wegen $|q'| \geq |N \cdot q'|$ und es ergibt sich die isoperimetrische Ungleichung:

$$vol_1(\partial\Omega_q)^2 \geq 4\pi\, vol_2(\Omega_q)$$

Dies lässt sich sogar mit dem Linearplanimeter realisieren. Im Fall der Gleichheit folgt $A = \pi L^2$ aus (5). Dann wählt man als L exakt den Umkreisradius von Ω_q und muss dazu das Stabende p geschickt führen. Da Ω_q dann den Flächeninhalt einer Kreisscheibe mit Radius L hat, gleichzeitig aber in einer solchen enthalten ist, muss Ω_q bereits eine Kreisscheibe gewesen sein. All das ist der wundervollen Internetseite von R.L.Foote entnommen.

Literatur

[Murray61] Francis J. Murray. *Mathematical Machines.* Volume II - Analog Devices, Columbia University Press, New York 1961

[Foote98] Robert L. Foote. *Geometry of the Prytz planimeter.* Rep. Math. Phys. 42, No.1-2, 249-271 (1998).

[Courant34] Richard F. Courant *Introduction to calculus and analysis.* Volume II, Springer-Verlag, New York 1989