

Übungsaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 12.1 (5 Punkte)

Es sei X und Y zentrierte Zufallsvariablen mit positiven Varianzen, d.h. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$ und $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 > 0$, $\text{Var}(Y) = \sigma_Y^2 > 0$.

- Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[(aX - Y)^2] = a^2\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2a\sigma_X\sigma_Y\rho(X, Y)$ für alle $a \in \mathbb{R}$, wobei $\rho(X, Y)$ die Korrelation von X und Y ist. Dies nennt man die mittlere quadratische Abweichung von aX zu Y .
- Für welchen Wert von a wird die mittlere quadratische Abweichung minimal? Wann ist sie 0?

Aufgabe 12.2 (5 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf $[-1, 1]$ und es sei $Y = X^2$.

- Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sind X und Y unkorreliert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 12.3 (5 Punkte)

Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der gleichverteilte Zufallsvariablen in $[0, 1]^2$ simuliert, d.h. Zufallsvariablen (X, Y) mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$.

- Wie lässt sich der Zufallszahlengenerator einsetzen, um die Zahl π näherungsweise zu berechnen?

Hinweis: Die Fläche eines Viertelkreises mit Radius 1 ist $\pi/4$.

- Angenommen Sie simulieren 1.000.000 zufällige Ziehungen von (X, Y) und setzen diese im Algorithmus aus a) ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Berechnung von π um mehr als 0,01 vom eigentlichen Wert abweicht?

Aufgabe 12.4 (5 Punkte)

Ein Affe tippt zufällig auf einer Computertastatur herum. Wir gehen davon aus, dass die Tastatur nur aus den Tasten A bis Z sowie der Leertaste besteht und dass der Affe jedes Mal zufällig eine der 27 Tasten drückt, unabhängig davon was bisher geschehen ist. Zeigen Sie, dass der Affe mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann den Text "STOCHASTIK MACHT SPASS" eingibt. Zeigen Sie auch, dass dies sogar unendlich oft geschieht.

Abgabe: Montag, 30. Januar 2012.

(Sie dürfen Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben. Geben Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt ab und schreiben Sie auf alle Zettel Namen und die Übungsgruppe.)