Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Nicolas Perkowski
Dipl.-Math. Jana Bielagk

Blatt 14
Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Stochastik

Die Aufgaben dieses Blattes orientieren sich stark an möglichen Klausuraufgaben. Versuchen Sie, diese in 120 Minuten zu lösen. Erlaubte Hilfsmittel sind ein Taschenrechner und die Normalverteilungstabelle.

Aufgabe 14.1 (5 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie eine kurze Begründung an. Für jede richtige Antwort bekommen Sie 0,5 Punkte und für die richtige Begründung nochmals 0,5 Punkte.

a) Die Summe von n unabhängigen und zum Parameter $p \in [0, 1]$ Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen ist binomialverteilt.

b) Wenn zwei Zufallsvariablen unabhängig sind, sind sie auch unkorreliert.

c) Aus $\mathrm{Var}(X) = 1$ folgt $\mathrm{Var}(-X) = -1$.

Die folgenden beiden Aufgaben zählen je einen Punkt:

d) Geben Sie die Dichte der Standardnormalverteilung an.

e) Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen mit gemeinsamer Massefunktion p. Geben Sie die bedingte Massefunktion $p_{X|Y}(x|y)$ von X gegeben $Y = y$ an.

Aufgabe 14.2 (5 Punkte)
Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$X \setminus Y$	0	1
1	$0,3$	$0,2 - a$
2	a	$0,3$
3	$0,1$	b

a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ gibt die Tabelle eine Massefunktion an?

b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X + Y \leq 2)$.

d) Gibt es Werte für a und b, so dass X und Y unabhängig sind?

Aufgabe 14.3 (5 Punkte)
Beim Lotto werden jeden Samstag ohne Zurücklegen 6 der Zahlen $\{1, \ldots, 49\}$ gezogen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ziehungen an zwei aufeinanderfolgenden Samstagen identisch sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den Ziehungen an zwei aufeinanderfolgenden Samstagen genau 3 Zahlen übereinstimmen?

Aufgabe 14.4 (5 Punkte)
Zwölf Prozent der Bevölkerung sind Linkshänder.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass es an einer Schule mit n Schülern genau k Linkshänder gibt?

b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass unter $n = 600$ Schülern mindestens 65 Linkshänder sind.

   Hinweis: Die Varianz der Binomialverteilung zum Parameter (n, p) ist $np(1-p)$.

Aufgabe 14.5 (5 Punkte)
Hinz und Kunz wollen sich im Johann-von-Neumann-Haus treffen. Hinz hat Kunz allerdings nur gesagt, dass sie sich in der 2. Etage treffen, nicht jedoch, in welchem der 4 Häuser. Kunz wird also rein zufällig in der 2. Etage von Haus $1, 2, 3$ oder 4 ankommen. Hinz ist in Haus 1. Kommt Kunz nicht dort an, wird er um Hilfe fragen. In Haus 2 wird ihm mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ geholfen, in Haus 3 mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ und in Haus 4 mit $1/4$. Wenn Kunz keine Hilfe bekommt, gibt er auf und kein Treffen mit Hinz findet statt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen sich die beiden?

b) Hinz und Kunz haben sich tatsächlich getroffen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war Kunz zuerst in Haus 3?

Aufgabe 14.6 (5 Punkte)
Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c, & x \in [0, 2\pi], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

für $c \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie c.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_X von X.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\sin(X)]$.