

Übungsaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 6.1 (5 Punkte)

Sei die Zufallsvariable X Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda > 0$.

- Für welches k ist $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$ maximal?
- Gegeben $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, für welches $\lambda > 0$ ist $p_X(k)$ maximal? Diese Vorgehensweise führt auf die sogenannte Maximum-Likelihood Schätzung, um bei einer Poissonverteilten Zufallsvariablen den unbekannt Parameter λ zu schätzen wenn der beobachtete Wert gleich k ist.

Aufgabe 6.2 (5 Punkte)

Unter einer Gruppe von 500 Menschen hat jeder einzelne unabhängig von den anderen eine bestimmte Krankheit mit Wahrscheinlichkeit 10^{-3} . In einem schnellen Bluttest wird jedem Blut entnommen und dann werden alle Proben zusammengemischt und getestet.

- Berechnen Sie die approximierte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test positiv ist, d.h. dass mindestens eine Person erkrankt ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Wahrscheinlichkeit.
- Angenommen der Test ist positiv. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 Personen erkrankt sind?

Aufgabe 6.3 (5 Punkte)

Eine Zufallsvariable X mit Werten in \mathbb{N} heißt gedächtnislos falls

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$$

gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}$.

- Sei X eine geometrisch zum Parameter $p \in (0, 1)$ verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass X gedächtnislos ist.
- Sei Y eine gedächtnislose Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N} . Zeigen Sie, dass ein $p \in (0, 1)$ existiert, so dass Y geometrisch verteilt zum Parameter p ist.

Warum nennt man diese Eigenschaft Gedächtnislosigkeit?

Aufgabe 6.4 (5 Punkte)

Die Anzahl der Eier X , die ein Insekt legt, sei eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable. Aus jedem der sich unabhängig voneinander entwickelnden Eier schlüpfe mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ eine Larve. Berechnen Sie die Massefunktion der Anzahl der Larven Y .

(Hinweis: Überlegen Sie, wie groß $\mathbb{P}(Y = k | X = n)$ ist.)

Abgabe: Montag, 5. Dezember 2016.

(Sie dürfen Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben. Geben Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt ab und schreiben Sie auf alle Zettel Namen und die Übungsgruppe.)