Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr. Nicolas Perkowski
Dipl.-Math. Jana Bielagk

Blatt 7
Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 7.1 (5 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen f und g:

$$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} C(2x - x^2), & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Können f und g Dichtefunktionen sein? Berechnen Sie gegebenenfalls c bzw. C so, dass f bzw. g Dichtefunktionen werden. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen mit dieser Dichte.

Aufgabe 7.2 (5 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen, zu den Paramentern $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. für $k, n \in \mathbb{N}$ gelte $\mathbb{P}(X_n = k) = p_n(1 - p_n)^{k-1}$. Weiterhin sei X eine zu $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable (d.h. X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ und $f_X(x) = 0$, $x < 0$), und es gelte $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$.

a) Sei $F_{X_n^\star}(x) = \mathbb{P}(X_n^\star \leq x)$ die Verteilungsfunktion von $X_n^\star := X_n/n$. Zeigen Sie, dass $F_{X_n^\star}(x) = 1 - (1 - p_n)^{\lfloor nx \rfloor}$, $x \geq 0$, wobei $\lfloor nx \rfloor := \max\{m \in \mathbb{N}_0 : m \leq nx\}$ die Gaußklammer von nx ist.

b) Sei $F_X(x) = P(X \leq x)$ die Verteilungsfunktion von X. Folgern Sie, dass $\lim_{n\to\infty} F_{X_n^\star}(x) = F_X(x)$ für alle $x \geq 0$.

   Hinweis: Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty}(1 + a_n/n)^n = e^a$.

c) Beschreiben Sie kurz, was Sie damit gezeigt haben.

Aufgabe 7.3 (5 Punkte)
Seien I_1, I_2, I_3, I_4 disjunkte und möglicherweise unendliche Teilintervalle von $\mathbb{R}$ mit $\bigcup_{j=1}^4 I_j = \mathbb{R}$ und sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f_X. Wir wissen, dass zwei Konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$f_X(x) = \begin{cases} c_1, & x \in I_1, \\ c_2, & x \in I_2, \\ 2 - x, & x \in I_3, \\ x, & x \in I_4. \end{cases}$$

Geben Sie eine mögliche Dichtefunktion f_X und die zugehörige Verteilungsfunktion vollständig an und skizzieren sie beide Funktionen. Gibt es andere Dichtefunktionen, die die vorgegebenen Kriterien erfüllen?

Aufgabe 7.4 (5 Punkte)
Sei $F\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine streng monoton wachsende Verteilungsfunktion und X eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable (d.h. X ist absolutstetig mit Dichte $f_X(x) = 1$, $x \in [0, 1]$ und $f_X(x) = 0$, sonst). Die Zufallsvariable Y sei definiert durch $Y(\omega) = F^{-1}(X(\omega))$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von Y.

Abgabe: Montag, 12. Dezember 2016.
(Sie dürfen Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben. Geben Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt ab und schreiben Sie auf alle Zettel Namen und die Übungsgruppe.)