

Übungsaufgaben zur Stochastik

Aufgabe 8.1 (5 Punkte)

In New York sind 50% der Einwohner dafür, das Rauchen auf der Straße zu verbieten. Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 55% einer rein zufälligen Auswahl von n Einwohnern New Yorks für dieses Verbot sind, wenn

- a) $n = 70$, b) $n = 200$, c) $n = 400$?

Aufgabe 8.2 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete oder absolutstetige Zufallsvariable.

- a) Zeigen Sie, dass für jede Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ und alle $a \geq 0$ gilt

$$\mathbb{P}(h(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{a}.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathbb{P}(h(X) \geq a) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{h(X) \geq a\}}]$ und dass $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[Z]$ falls $Y(\omega) \leq Z(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

- b) Seien μ der Erwartungswert μ und σ die Standardabweichung von X . Zeigen Sie, dass für $c > 0$

$$\mathbb{P}(X \in (\mu - c\sigma, \mu + c\sigma)) \geq 1 - \frac{1}{c^2}.$$

Aufgabe 8.3 (5 Punkte)

Sei X eine absolutstetige Zufallsvariable mit Dichte f und existierendem Erwartungswert.

- a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass f symmetrisch um x_0 ist, d.h. $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X] = x_0$ und dass x_0 ein Median von X ist.
- b) Geben Sie eine Dichte f an, so dass $\mathbb{E}[X]$ kein Median von X ist.

Aufgabe 8.4 (5 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat in diesem Jahr wenig Zeit und kann die Geschenke nur nach dem folgenden Schema verteilen: Er fliegt entlang eines Gitters über Berlin. Er startet im Punkt $(0,0)$ und fliegt in unabhängigen Schritten in jeder Zeiteinheit einen Gitterschritt nach oben oder nach rechts zum nächsten Gitterpunkt. Dabei bewegt er sich mit der Wahrscheinlichkeit $0,6$ nach rechts.

- a) Wo kann er sich nach 12 Schritten befinden? Welche Position ist am wahrscheinlichsten?
- b) Sie wohnen in Punkt $(3,4)$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schaut er in diesem Jahr bei Ihnen vorbei?

Abgabe: Dienstag, 3. Januar 2017.

(Sie dürfen Ihre Lösungen in Zweiergruppen abgeben. Geben Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt ab und schreiben Sie auf alle Zettel Namen und die Übungsgruppe.)

Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(z) = \mathbb{P}(X \leq z), \quad X \sim N(0, 1)$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997