HD Dr. Manfred Lehn
Dipl.Math. David Ploog

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II
Blatt 1, Abgabe Do 26. April 2001

Aufgabe 1.1 a) Seien $c_1, \ldots, c_n$ die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A. Kennt man damit schon die Eigenwerte von A^k ($k \in \mathbb{Z}$ für invertiebares A und $k \in \mathbb{N}$ für singuläres A)?

b) Von der 3×3-Matrix B sei bekannt:

$$\mathrm{Spur}(B) = 1, \quad \mathrm{Spur}(B^2) = 3, \quad \mathrm{Spur}(B^3) = 1.$$

Was können Sie über die Eigenwerte von B sagen?

Aufgabe 1.2 — Geben Sie das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Jordanform der folgenden Matrix an!

$$\begin{pmatrix} -4 & -9 & -4 & 8 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ -3 & -6 & -5 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ -8 & -15 & -10 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.3 — Sei k ein Körper und $k[x]$ der Polynomring in einer Variablen über k. Wir betrachten paarweise teilerfremde Polynome $f_1, \ldots, f_r \in k[x]$, Exponenten $n_i \in \mathbb{N}$ und ein beliebiges weiteres Polynom $g \in k[x]$. Zeigen Sie, dass es genau eine Darstellung der folgenden Art gibt:

$$\frac{g}{f_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{n_r}} = a_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{a_{ij}}{f_i^j}$$

mit $a_0 \in k[x]$, $a_{ij} \in k[x]$, $\deg(a_{ij}) < \deg(f_i)$.
Die Darstellung von gebrochen-rationalen Funktionen g/f in der obigen Form als Summe nennt man Partialbruchzerlegung.
[Hinweis: Benutzen Sie Euklidischen Algorithmus und größten gemeinsamen Teiler.]

Aufgabe 1.4 — Zerlegen Sie die folgenden gebrochen-rationalen Funktionen in Partialbrüche, über den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

a) $$\frac{1}{x^3+1}$$

b) $$\frac{x^2-2}{(x^2+2)^2}$$

[Hinweis: Auch hier geht Euklidischer Algorithmus; einfacher ist aber ein allgemeiner Ansatz mit anschließendem Koeffizientenvergleich.]

Aufgabe 2.5 — Berechnen Sie das Minimalpolynom, die Jordansche Normalform und einen geeigneten Basiswechsel für folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 10 & -5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.6 — Es sei $G \in GL(n, \mathbb{C})$ eine Matrix mit der Eigenschaft

$$G^m = I_n$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass G diagonalisierbar ist.
Was können Sie über die Eigenwerte von G sagen?
[Hinweis: Jordan–Normalform.]

Aufgabe 2.7 In dieser Aufgabe werden wir die Exponentialfunktion für Matrizen definieren. Dazu benutzen wir folgende Tatsachen aus der Analysis: $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist ein Banach-Raum unter der Norm $||A||_\infty := \max_{i,j}(A_{ij})$ und es gelten alle bekannten Sätze der Analysis.
Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definieren wir

$$\exp(A) := \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k.$$

Zeigen Sie:

a) Die rechte Seite ist eine konvergente Reihe in $M_n(\mathbb{R})$ bezüglich $||\cdot||_\infty$.

b) Sind $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei kommutierende Matrizen, so gilt

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Geben Sie ein Beispiel mit $n = 2$ dafür an, dass die Voraussetzung $AB = BA$ wirklich nötig ist.

c) Mit beliebigem $P \in GL(n, \mathbb{R})$ gilt

$$\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}.$$

d) Es gilt

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Was ist $\exp(N)$ für die folgende Matrix?

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Berechnen Sie $\exp(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Hinweis: Zerlege A in Jordan-Normalform und benutze c) und d).]

Aufgabe 3.8 — Wir betrachten einen gedämpften Schwinger:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0,$$

dabei ist $m > 0$ die Masse, $\gamma \geq 0$ der Reibungskoeffizient und $k > 0$ die Federkonstante. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Die Substitution $v := \dot{x}$ liefert ein System linearer Differenzialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\gamma}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungen dieses Systems! Unterscheiden Sie dabei das qualitative Verhalten in Abhängigkeit von γ.

Aufgabe 3.9 — Ein Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ heißt *unipotent*, falls $\varphi - id$ nilpotent ist.

a) Kann man unipotente und nilpotente Endomorphismen an ihren Eigenwerten erkennen?

b) Beweisen Sie, dass unipotente Endomorphismen invertierbar sind.

c) Sei V nun endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\exp(\varphi)$ unipotent ist für nilpotentes φ.

Aufgabe 3.10 — Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jeder Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ eine eindeutige additive Zerlegung $\varphi = \varphi_s + \varphi_n$ mit diagonalisierbarem φ_s und nilpotentem φ_n besitzt. In dieser Übung sollen Sie eine multiplikative Variante für invertierbare Endomorphismen beweisen.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ ein invertierbarer Endomorphismus. Zeigen Sie:

a) φ_s aus der additiven Jordan-Chevalley-Zerlegung ist invertierbar.

b) Für φ gibt es eine Produktdarstellung

$$\varphi = \varphi_s\varphi_u = \varphi_u\varphi_s$$

mit diagonalisierbarem φ_s und unipotentem φ_u.

Aufgabe 3.11 — Wir betrachten den Quotienten-Vektorraum

$$V := \mathbb{R}^4/\mathbb{R}\langle(1,1,1,1)^t\rangle$$

und die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{R}^4 \to V$.

a) Geben Sie eine Basis von V an.

b) Wie sieht die Abbildungsmatix von π bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und der Basis aus a) für V aus?

c) Sind die Vektoren $\pi((1,2,0,1)^t)$, $\pi((2,0,1,1)^t)$, $\pi((3,-5,2,0)^t)$ linear abhängig in V?

Aufgabe 4.12 — Sei $V = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Wir betrachten für alle $x \in [0,1]$ die folgenden Abbildungen $V \to \mathbb{R}$

$$\delta_x(f) = f(x), \quad \delta'_x(f) = -f'(x), \quad \sigma_x(f) = \int_0^x f(t)dt, \quad \sigma'_x(f) = -\int_0^x f'(t)dt,$$

$$\alpha(f) = \int_0^1 t \cdot f'(t)\, dt, \quad \beta(f) = \int_0^1 f(t^2)\, dt, \quad \gamma(f) = \int_0^1 f^2(t)\, dt.$$

Welche davon sind Linearformen auf V, also Elemente von $V^\vee = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$? Geben Sie für diese alle linearen Relationen in $V^\vee$ an!

Aufgabe 4.13 — Wir betrachten

$$W := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ mit } |\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq 0\}| < \infty\} = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},$$

das ist der Vektorraum aller Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit endlichem Träger.

a) Zeigen Sie, dass der Dualraum $W^\vee$ der Vektorraum aller Folgen ist:

$$W^\vee \cong \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

b) Beweisen Sie damit, dass die kanonische Abbildung

$$\theta_W : W \to W^{\vee\vee} \ \text{ mit } \ \theta_W(w) : W^\vee \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \varphi(w)$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 4.14 — Für einen Vektorraum V seien zwei Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(v_1, \dots, v_n)$ gegeben, und es sei S die Basiswechselmatrix, das heißt

$$v_i = \sum_{j=1}^n S_{ji} e_j.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix für die dualen Basen in V^*.

Aufgabe 4.15 — Es seien $U \subset V \subset W$ Vektorräume. Beweisen Sie den zweiten Isomorphiesatz: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$W\big/V \cong (W/U)\big/(V/U).$$

[Hinweis: Betrachten Sie die kanonische Projektion $W/U \to W/V$.]

Aufgabe 4.16 — Das Computeralgebraprogramm MAPLE stellt mit dem Programmpaket `linalg` eine Routine `jordan` zur Verfügung, die die Jordanmatrix zu einer gegebenen Matrix samt der zugehörigen Basiswechselmatrix berechnet. Nun benutzt MAPLE eine andere Konvention als wir in der Vorlesung: Dort sind in jedem Jordan-Block die Einsen auf der oberen anstatt der unteren Nebendiagonale.
Der Übergang von einer Konvention zur anderen geschieht dadurch, dass man eine gegebene Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ umordnet zu $(v_n, \ldots, v_1)$. Schreiben Sie (unter Rückgriff auf `jordan`) eine Routine `unserjordan`, die dieselbe Syntax wie die Originalroutine hat und die Jordan- und Basiswechselmatrix nach unserer Konvention berechnet. Geben Sie einen Ausdruck Ihres Programmes ab zusammen mit der Anwendung auf die 4×4-Matrix der zweiten Übungsserie!

Wenn Sie auf die Bekanntschaft mit MAPLE verzichten möchten, so sollten Sie den Zusammenhang zwischen den beiden Jordan-Formen durch geeignete Konvertierungsmatrizen ausdrücken:

a) Zeigen Sie, wie man aus einer Matrix in Jordan-Form durch Matrizenmultiplikation die Jordan-Form der anderen Konvention erhält!

b) Zeigen Sie weiterhin, wie sich dabei die Basiswechselmatrizen ändern!

HD Dr. Manfred Lehn
Dipl.Math. David Ploog

Aufgabe 5.17 — Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Raum. Zeigen Sie, dass die Winkelsumme im Dreieck gleich zwei rechten Winkeln ist, d.h. dass für alle paarweise verschiedenen $a, b, c \in V$ gilt:

$$\sphericalangle\,(b-a, c-a) + \sphericalangle\,(a-b, c-b) + \sphericalangle\,(a-c, b-c) = \pi.$$

Hinweis: Denken Sie an die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

Aufgabe 5.18 — Wenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren auf die folgenden Vektoren an und berechnen Sie so eine Orthonormalbasis für die angegebenen Räume:

1. Im $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und für die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

2. Im Raum $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ der Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

und für die Vektoren $1, X, X^2, \ldots, X^n$.

Aufgabe 5.19 — Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert 1, und für jede Matrix $A \neq I_3$ ist dieser eindeutig bestimmt (bis auf skalare Vielfache). A ist eine Drehung um die durch diesen Eigenvektor gegebene Drehachse. *Zeigen Sie zunächst: A besitzt jedenfalls einen reellen Eigenwert.*

Aufgabe 5.20 — Wir wollen den Satz beweisen, dass eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V genau dann von einem Skalarprodukt herkommt, wenn für alle $x, y \in V$ die Parallelogrammgleichung gilt:

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Davon ist eine Richtung sehr leicht, die andere erfordert etwas mehr Mühe. Falls es ein Skalarprodukt gibt, ist es jedenfalls folgendermaßen gegeben:

$$b(u,v) := \frac{1}{2}\Big(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2\Big).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die so definierte Abbildung $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ alle Eigenschaften eines Skalarproduktes hat. Beweisen Sie deshalb schrittweise:

1. b ist symmetrisch und positiv definit. $b(u,v)$ ist stetig bei festem u als Funktion von v und umgkehrt. Für alle u gilt $b(u,0) = 0$.

2. Aus der Parallelogrammgleichung folgt für beliebige $u, v, w \in V$, dass

$$b(u, v+w) + b(v-w) = 2b(u,v).$$

3. Folgern Sie, dass für beliebige $u, v, w \in V$ gilt, dass

$$b(u,v) + b(u,w) = b(u, v+w).$$

4. Für beliebige $u, v \in V$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$b(u, rv) = rb(u,v).$$

5. Nehmen Sie alle bisherigen Ergebnisse zusammen und zeigen Sie, dass b bilinear ist.

Aufgabe 6.21 — i) Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Raum und $v \in V$ ein nichttrivialer Vektor. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$s_v : V \longrightarrow V, x \mapsto x - 2\frac{\langle x, v\rangle}{\langle v, v\rangle}v$$

die folgenden Eigenschaften hat:

1. $s_v^2 = \mathrm{id}_V$.
2. s_v ist eine Isometrie.
3. s_v ist die Identität auf der zu v senkrechten Hyperebene $H = v^\perp$ und $s_v(v) = -v$.

s_v heißt Spiegelung an H.
ii) Sind $v, w \in V$ linear unabhängig, so ist $D := s_v s_w$ auf $U := \mathbb{R}\langle v, w\rangle$ eine Drehung um den Winkel $2 \sphericalangle (v, w)$ und auf $U^\perp$ die Identität.

Aufgabe 6.22 — Es sei V der (unendlichdimensionale) Vektorraum der stückweise stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Dabei soll eine Funktion f stückweise stetig heißen, wenn es endlich viele Punkte $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 1$ gibt, so dass f auf jedem der offenen Teilintervalle (x_{i-1}, x_i) stetig ist. Das genügt, damit f integrierbar ist. In V liegen auf jeden Fall die folgenden stetigen Funktionen:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_{2k-1}(x) = sin(kx), \quad f_{2k}(x) = cos(kx) \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass diese Funktionen bezüglich dem Skalarprodukt

$$(f, g) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

ein Orthonormalsystem bilden, d.h. paarweise senkrecht aufeinander stehen und die Länge 1 haben. (*Sie bilden aber keine Basis !*). Für $g \in V$ sei g_n die orthogonale Projektion von g auf den endlichdimensionalen Unterraum

$$U_n := \mathbb{R}\langle f_0, f_1, \ldots, f_{2n}\rangle \subset V$$

Berechnen Sie die Approximationen g_n für die folgenden Funktionen

1. $g(x) = x - \pi$.

2. $g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 \quad \text{falls} & x = \pi \\ -1 & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

Wenn Sie Maple zur Verfügung haben, plotten Sie die Funktionen g_n für verschiedene n und die ursprüngliche Funktion g. Funktionen kann man definieren durch

```
f3:=x->sin(2*x);
```

Man kann mehrere Funktionen gleichzeitig plotten mit dem Befehl

```
plot({ff(x),f(x),F(x)},x=0..2*Pi);
```

Man sieht schön, wie für wachsendes n die g_n der Ausgangsfunktion g immer ähnlicher werden. Die Frage, in welchem Sinne die Folge g_n gegen g konvergiert, gehört in die Analysis und bedarf einer detaillierteren Untersuchung (Fourierzerlegung).

Aufgabe 6.23 — Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, zeigen Sie direkt, d.h. ohne Rückgriff auf den Satz aus der Vorlesung über die Struktur der orthogonalen Abbildungen, der eine Anleihe an die Jordansche Normalform macht, die folgende Behauptung:
Jede Isometrie $\varphi : V \to V$ lässt sich als Produkt $\varphi = s_1 \circ \ldots \circ s_\ell$ von $\ell \leq \dim(V)$ Spiegelungen schreiben. Dabei ist s_i eine Spiegelung im Sinne der Aufgabe 1.
Hinweis: Induktion über die Dimension des Eigenraums $E_1(\varphi)$. Finden Sie eine Spiegelung s derart, dass $E_1(s\varphi)$ eine echte Obermenge von $E_1(\varphi)$ ist.

Aufgabe 7.24 — Wir versehen den $\mathbb{R}^2$ mit der indefiniten Bilinearform b, die bezüglich der Standardbasis die Matrixform $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ hat.
Zu b definieren wir $\mathrm{O}(1,1)$ als Menge aller bezüglich b orthogonalen Matrizen:

$$\mathrm{O}(1,1) \quad := \quad \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid b(Av, Aw) = b(v,w) \ \forall v, w \in \mathbb{R}^2\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von $\mathrm{O}(1,1)$:

a) $\mathrm{O}(1,1)$ ist eine Gruppe.

b) $A \in \mathrm{O}(1,1)$ genau dann, wenn $A^t \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Alle Matrizen in $\mathrm{SO}(1,1) := \mathrm{O}(1,1) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ sind von der Form

$$C(\alpha) := \begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}$$

für geeignete $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Wir fassen $\mathbb{R} \oplus 0$ als Zeitachse und $0 \oplus \mathbb{R}$ als Raumachse auf. Ein Teilchen, das sich mit Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}$ bewegt, hat die Bahn

$$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ tv \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} =: L.$$

Im Bezugssystem des Teilchens wird L zur neuen Zeitachse und $L^\perp$ zur neuen Raumachse. Bestimmen Sie Vektoren im ersten Quadranten $e_1' \in L$ und $e_2' \in L^\perp$ mit $b(e_1', e_1') = 1$, $b(e_2', e_2') = -1$. Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $B = M^E_{E'}(id)$. Zeigen Sie $B \in \mathrm{SO}(1,1)$ und finden Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $B = C(\alpha)$.

Hinweis: Die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen cosh, sinh und tanh sind definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Aufgabe 7.25 — Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer fixierten Basis $E = (e_1, \ldots, e_n)$, weiterhin V^* der Dualraum von V und $E^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ die zu E duale Basis. Zusätzlich betrachten wir eine Bilinearform b auf V und die zugehörige adjungierte Abbildung $b' : V \to V^*$. Schließlich sei B die Matrixdarstellung von b bezüglich E und B' die Matrix der linearen Abbildung b' bezüglich der Basen E und E^*. Beweisen Sie, dass dann $B' = B^t$ gilt!

Aufgabe 7.26 — Gegeben sei ein endlicher Graph Γ, das ist eine endliche Menge $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ zusammen mit einer Menge $K \subset \mathfrak{P}_2(E)$ von zweielementigen Teilmengen $\{e_i, e_j\} \subset E$ mit $i \neq j$. Man nennt $e_1, \dots, e_n$ die Ecken des Graphen und die ungeordneten Paare in K seine Kanten. Weiter unten sehen Sie typische Bilder von Graphen.
Einem solchen Graphen kann man nun eine Matrix $M(\Gamma)$ zuordnen. Dazu betrachten wir den n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^E$ mit Basis $v_1, \dots, v_n$. Die Einträge der Matrix $M(\Gamma)$ definieren wir durch

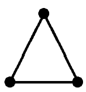
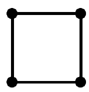
$$M(\Gamma)_{ij} := \begin{cases} 2, & \text{für } i = j \\ -1, & \text{für } \{e_i, e_j\} \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$M(\Gamma)$ ist offenbar symmetrisch und definiert daher eine symmetrische Bilinearform auf V, die wir mit $b(\Gamma)$ bezeichnen. In dieser Aufgabe geht es darum, für einige spezielle Graphen Eigenschaften dieser Formen nachzuweisen. Im Weiteren sei stets $n \in \mathbb{N}$.

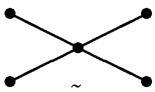
a) Wir betrachten Graphen A_n mit Ecken $E = \{1, 2, \dots, n\}$ und Kanten $K = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1, n\}$. Zeigen Sie, dass $b(A_n)$ positiv definit ist!

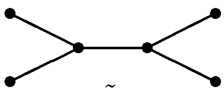
 A_2 A_3 A_n

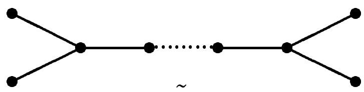
b) Jetzt betrachten wir für $n \geq 2$ die Graphen $\tilde{A}_n$ mit $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$ und $K = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n, n+1\}, \{n+1, 1\}\}$. Beweisen Sie, dass $b(\tilde{A}_n)$ einen nichttrivialen isotropen Vektor besitzt!

 $\tilde{A}_2$  $\tilde{A}_3$

c) Schließlich sei für $n \geq 4$ der Graph $\tilde{D}_n$ mit $E = \{a, b, c, d, 1, 2, \dots, n-3\}$,
$K = \{\{1,2\}, \dots, \{n-4, n-3\}, \{a, 1\}, \{b, 1\}, \{c, n-3\}, \{d, n-3\}\}$ definiert. Hier ist wie in b) zu zeigen, dass $b(\tilde{E}_n)$ einen nichttrivialen isotropen Vektor hat.


$\tilde{D}_4$


$\tilde{D}_5$


$\tilde{D}_n$

[Hinweise: Bei a) können Sie Aufgabe 55 aus dem vorigen Semester benutzen. Bei b) und c) sind lediglich isotrope Vektoren anzugeben. Denken Sie sich Vektoren aus V als Abbildungen $E \to \mathbb{R}$, die jeder Ecke einen Wert zuweisen.]

Aufgabe 7.27 — Es seien $n_+, n_- \in \mathbb{N}$ gegeben und $n := n_+ + n_-$. Wir versehen den Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^n$ mit der symmetrischen Bilinearform b der Signatur (n_+, n_-), das heißt

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n_+} x_i y_i - \sum_{i=1+n_+}^{n_-+n_+} x_i y_i.$$

In V betrachten wir die Teilmengen der positiven und negativen Vektoren

$$V^+ = \{v \in V \mid b(v, v) > 0\}, \quad V^- = \{v \in V \mid b(v, v) < 0\}.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Mengen V^+ und V^- (aufgefasst als Teilmengen des metrischen Raumes $\mathbb{R}^n$):

a) V^+ und V^- sind offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

b) V_+ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten für $n_+ = 1$.

c) Falls $n_+ \geq 2$, so ist V_+ wegzusammenhängend.

[Fertigen Sie Zeichnungen für die Fälle $(n_+, n_-) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ an! *Natürlich gelten diese Aussagen analog für n_- und V_-.*]

Aufgabe 7.28 — Wir versehen den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{1+m}$ mit der Minkowskimetrik, das heißt

$$b(v, w) := v_1 w_1 - \sum_{i=2}^{1+m} v_i w_i.$$

Der positive Kegel wird wie in der vorigen Aufgabe definiert als die Teilmenge

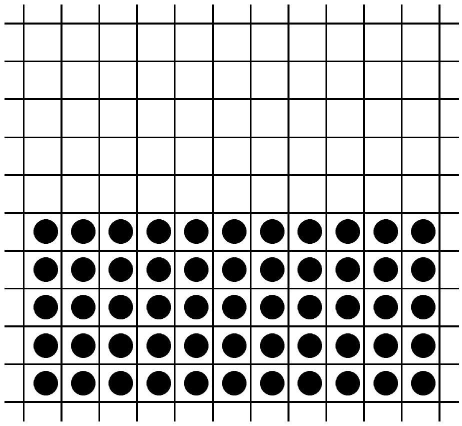
$$V^+ := \{v \in V \mid b(v, v) > 0\}.$$

Für $v \in V^+$ sei $|v| := \sqrt{b(v, v)}$.
Beweisen Sie die hyperbolische Cauchy-Schwarz-Ungleichung

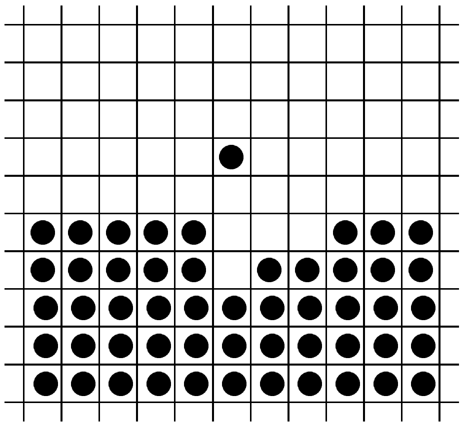
$$|b(v, w)| \geq |v| \cdot |w| \quad \text{für } v, w \in V^+$$

und zeigen Sie, dass Gleichheit genau dann gilt, wenn v und w kollinear sind.

Zusatzaufgabe
Die folgende Aufgabe stammt, glaube ich, von John Conway.
Auf einem nach allen Seiten unbegrenzten Schachbrett sei die untere Hälfte vollständig mit schwarzen Steinen belegt:



Nach den Regeln des Einsiedlerspiels darf man mit einem Stein in senkrechter oder waagerechter Richtung einen Nachbarstein überspringen, wenn das Feld dahinter frei ist. Der übersprungene Stein wird entfernt. Nach drei Zügen kann das Brett etwa so aussehen:



Wie weit kann sich ein schwarzer Stein über den Horizont erheben?

Wie immer gilt: Wer die Lösung schon kennt oder in der Literatur findet, scheidet aus sportlichen Gründen aus.

HD Dr. Manfred Lehn
Dipl.Math. David Ploog

Aufgabe 9.29 — Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter λ den Typ der folgenden Quadriken im $\mathbb{R}^3$:

$$y^2 + xy - 2xz + x - 2y + z = \lambda.$$

Was ändert sich, wenn man die Quadriken in $\mathbb{C}^3$ betrachtet?

Aufgabe 9.30 — Finden Sie einen *orthonormalen* Basiswechsel, so dass die durch

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 36 = 0$$

gegebene Fläche im $\mathbb{R}^3$ eine Gleichung in Normalform bekommt (Hauptachsentransformation).

Aufgabe 9.31 — Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Jeder Unterraum $U \subset V$ wird mit der induzierten Bilinearform $b|_{U\times U}$ versehen. Welche der folgenden Eigenschaften b bleiben bei Einschränkung auf beliebige Unterräume erhalten? (Beweis oder Gegenbeispiel)

i) b ist symmetrisch (selbstadjungiert)

ii) b ist nicht-ausgeartet

iii) b ist positiv-definit

Aufgabe 9.32 — Wir betrachten den Kegel im $\mathbb{R}^3$ mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Wenn man ihn mit affinenen Ebenen schneidet, so ist der Schnitt je nach Lage der Ebene eines der folgenden Gebilde: Eine Ellipse, eine Hyperbel, eine Parabel, zwei sich schneidende Geraden, eine Gerade oder ein Punkt. Zeigen Sie, dass man durch eine geeignete Wahl der Schnittebene jede in der Liste der euklidischen Normalformen auftretende Ellipse, Hyperbel oder Parabel erhalten kann.

[Hinweis: Man kann sich auf Schnittebenen mit der Gleichung $ax + cz = 1$ beschränken. Warum?]

Aufgabe 10.33 — Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$ und $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ zwei euklidische Vektorräume. Weiter sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und $f^{\mathrm{a}} : W \to V$ ihre adjungierte Abbildung. Zeigen Sie:

a) f surjektiv $\implies$ f^{a} injektiv.

b) f injektiv $\implies$ f^{a} surjektiv.

c) Für surjektives f hat V eine *orthogonale* Zerlegung

$$V = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f^{\mathrm{a}}).$$

Aufgabe 10.34 — Wir fixieren einen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Wir betrachten die Abbildung

$$a : \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V),\ f \mapsto f^{\mathrm{a}},$$

die jedem f die adjungierte Abbildung f^{a} zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass a ein Vektorraumisomorphismus ist. Wenn man $\mathrm{End}(V)$ als nichtkommutativen Ring auffasst (mit Komposition als Multiplikation), ist a dann (wenigstens fast) ein Ringisomorphismus?

b) In $\mathrm{End}(V)$ betrachten wir die Eigenräume von a zu den Eigenwerten 1 und -1:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_+ &:= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f^{\mathrm{a}} = f\} \\ \mathcal{A}_- &:= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f^{\mathrm{a}} = -f\} \end{aligned}$$

Offenbar ist $\mathcal{A}_+$ der Raum der selbstadjungierten linearen Abbildungen. Beweisen Sie die Zerlegung

$$\mathrm{End}(V) = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-.$$

Hinweis: Dafür ist zu zeigen, dass es zu $f \in \mathrm{End}(V)$ eindeutig bestimmte Abbildungen $f_+ \in \mathcal{A}_+$ und $f_- \in \mathcal{A}_-$ gibt mit $f = f_+ + f_-$.

c) Zeigen Sie weiterhin, dass f_+ und f_- genau dann kommutieren, wenn f normal ist.

Aufgabe 10.35 — Ein Polynom $p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ heißt *homogen* vom Grad d, wenn jedes Monom in p den Grad d hat. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathcal{P}(n, d) := \{p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \mid p \text{ homogen vom Grad } d\}.$$

Zum Beispiel ist $\pi := X_1^2 + \cdots + X_n^2 \in \mathcal{P}(n, 2)$.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Monome vom Grad d in n Variablen:

$$\dim \mathcal{P}(n, d) = \binom{n-1+d}{n-1}.$$

b) Bezeichne $D_i := \frac{\partial}{\partial X_i}$ die partiellen Ableitung. Jedem Polynom p kann man dann einen Ableitungsoperator $p(D) := p(D_1, \dots, D_n)$ zuordnen, indem man für X_i jeweils D_i einsetzt.

Zum Beispiel ist $\pi(D) = D_1^2 + \cdots + D_n^2 = \Delta$ der Laplace-Operator, eine lineare Abbildung $\Delta : \mathcal{P}(n, d) \to \mathcal{P}(n, d-2)$.

Zeigen Sie, dass $p(D)q \in \mathbb{R}$ für alle $p, q \in \mathcal{P}(n, d)$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{P}(n, d) \times \mathcal{P}(n, d) \to \mathbb{R}, \ \ (p, q) \mapsto \langle p, q \rangle := p(D)q$$

symmetrisch und bilinear ist.

d) Die Monome in $\mathcal{P}(n, d)$ sind orthogonal. Zeigen Sie genauer

$$\langle x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \rangle = \begin{cases} 0 & (i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n) \\ i_1! \cdots i_n! & (i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n) \end{cases}$$

Beweisen Sie damit, dass die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Somit ist $(\mathcal{P}(n, d), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

e) Für alle $p \in \mathcal{P}(n, d)$ und $q \in \mathcal{P}(n, d-2)$ gilt

$$\langle \Delta p, q \rangle = \langle p, \pi \cdot q \rangle.$$

Demnach hat Δ die adjungierte Abbildung $\Delta^{\mathrm{a}} = \pi$ (aufgefasst als Multiplikationsabbildung $\pi : \mathcal{P}(n, d-2) \to \mathcal{P}(n, d), \ q \mapsto \pi \cdot q$).

f) Die lineare Abbildung $\Delta : \mathcal{P}(n, d) \to \mathcal{P}(n, d-2), \ p \mapsto \Delta p$ ist surjektiv.

$\mathcal{H}(n, d) := \ker(\Delta)$ ist der Vektorraum der *harmonischen Polynome*.

g) $\mathcal{P}(n, d)$ hat die orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{P}(n, d) = \mathcal{H}(n, d) \oplus \pi \mathcal{P}(n, d-2).$$

Hinweise: Bei f) und g) können Sie die erste Aufgabe zu Hilfe nehmen.

Aufgabe 11.36 — Wir betrachten $\mathbb{C}^n$ als unitären Standardraum.

a) Zu einer vorgebenen hermiteschen, positiv definiten Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ gibt es genau eine hermitesche, positiv definite Matrix B mit $B^2 = A$. Wir schreiben daher $\sqrt{A} := B$.

b) Berechnen Sie

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

Hinweis zur Konstruktion: Benutzen Sie die Diagonalisierbarkeit hermitescher Matrizen durch unitäre Basiswechsel.
Hinweis zur Eindeutigkeit: Fassen Sie die Matrix als halbeinfachen Endomorphismus f von $\mathbb{C}^n$ auf. Auf einem Eigenraum V von f zum Eigenwert λ ist $f|_V = \lambda \cdot id_V$. Der gesuchte Endomorphismus $\sqrt{f}$ ist durch die Forderung festgelegt, halbeinfach mit positiven Eigenwerten zu sein.

Aufgabe 11.37 — Gegeben ist die folgende Matrix:

$$M_{\lambda,\mu} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \lambda & \frac{1}{2} \\ \lambda & 0 & \mu \\ \frac{1}{2} & \mu & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mit komplexen Parametern λ und μ.
Für welche Werte von λ und μ ist $M_{\lambda,\mu}$ hermitesch? Gibt es unter diesen sogar positiv definite Matrizen?
Für welche Werte von λ und μ ist $M_{\lambda,\mu}$ unitär?

In den beiden folgenden Aufgaben sollen Sie die Cayley-Transformation untersuchen — einmal im klassischen Fall und zum anderen in Matrizenform. Beide Teile sind unabhängig voneinander.

Aufgabe 11.38 — Wir betrachten Teilmengen der komplexen Ebene:

$$\begin{aligned} H &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \\ \mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}, \\ D &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \\ S^1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \end{aligned}$$

Die Cayley-Transformation ist die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Zeigen Sie:

a) ϕ gibt eine Bijektion von H mit D. Finden Sie die inverse Abbildung!

b) Außerdem induziert ϕ auch eine Bijektion von $\mathbb{R}$ mit $S^1 \setminus \{1\}$.

Aufgabe 11.39 — Wir betrachten einige Teilmengen von $M_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = A^*\} \\ \mathcal{U} &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = I\} \\ \mathcal{U}_I &= \{A \in \mathcal{U} \mid \det(I + A) \neq 0\} \end{aligned}$$

In Analogie zur vorigen Aufgabe haben wir die Cayley-Transformation

$$\phi : \mathcal{H} \to M_n(\mathbb{C}), \qquad H \mapsto (I + iH)(I - iH)^{-1} \quad .$$

Zeigen Sie in diesen vier Schritten, dass ϕ eine Bijektion von $\mathcal{U}_I$ mit $\mathcal{H}$ gibt.

a) $H + iI$ ist invertierbar, also $\phi(H)$ wohldefiniert.

b) $\phi(H)$ ist unitär, dass heißt $\operatorname{im}(\phi) \subset \mathcal{U}$.

c) Es gilt sogar $\operatorname{im}(\phi) \subset \mathcal{U}_I$.

d) Finden Sie eine Umkehrabbildung $\psi : \mathcal{U}_I \to \mathcal{H}$ für ϕ.

Aufgabe 12.40 — Quaternionen Wir betrachten den Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Er enthält als Unterkörper die reellen Zahlen.

a) Für $x \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ sei $K_x := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}x$. K_x erbt Addition und Multiplikation von $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass K_x ein Körper ist und zwar isomorph zum Körper der komplexen Zahlen.

b) Beweisen Sie, dass es zu jedem solchen Körper K_x genau zwei Elemente $y_1, y_2 \in K_x$ gibt mit $y_1^2 = y_2^2 = -1$.

   Außerdem gilt $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ und $y_1\bar{y}_1 = y_2\bar{y}_2 = 1$.

Die Sphäre S^2 fassen wir als Teilmenge $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathrm{Im}\mathbb{H}$ auf:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im(x)} = 0,\ \mathrm{x\bar{x}} = 1\}.$$

Nun werden wir antipodale Punkte dieser Sphäre identifizieren:

$$S^2 \big/ \{\pm 1\} := \{\ \{x, -x\} \mid x \in S^2\}.$$

Mit den beiden Aussagen ist gezeigt, dass es eine Bijektion gibt

$$\begin{array}{rcl} S^2 \big/ \{\pm 1\} & = & \{\mathbb{R} \subset K \subset \mathbb{H} \text{ komplexer Unterkörper}\} \\ \left\{ \pm \dfrac{x}{|x|} \right\} & \leftrightarrow & K_x. \end{array}$$

Aufgabe 12.41 — Semidirekte Produkte

a) Zwei Gruppen H und N und ein Homomorphismus $\psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ seien gegeben. Wir versehen die Menge $N \times H$ mit der Multiplikation

$$(n, h) \bullet_\psi (n', h') := (n \cdot \psi(h)(n'), h \cdot h').$$

Zeigen Sie, dass dies eine Gruppenstruktur auf $N \times H$ definiert.

Die Gruppe $(N \times H, \bullet_\psi)$ wird äußeres semidirektes Produkt von H und N genannt und mit $N \rtimes_\psi H$ bezeichnet (oft auch nur mit $N \rtimes H$).

Zeigen Sie, dass sich H und N kanonisch als Untergruppen von $N \rtimes H$ auffassen lassen und N dabei sogar ein Normalteiler ist. Trivial sind dann $H \cdot N = N \rtimes N$ und $H \cap N = \{1\}$.

b) Sei nun G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \subset G$ ein Normalteiler. G heiß inneres semidirektes Produkt von H und N, falls $H \cdot N = G$ und $H \cap N = \{1\}$ gelten.

Zeigen Sie, dass G auch äußeres semidirektes Produkt von H und N ist. Dafür definieren wir

$$\psi : H \to \mathrm{Aut}(N), \quad \psi(h)(n) := hnh^{-1}.$$

Somit sind die beiden Definitionen äquivalent und wir machenen keine Unterscheidung zwischen inneren und äußeren semidirekten Produkten.

c) Eine weitere Beschreibung semidirekter Produkte ist mit exakten Sequenzen möglich. Sei

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1$$

eine kurze exakte Folge von Gruppen, dass heißt i ist injektiv, p ist surjektiv und es gilt $\mathrm{im}(i) = \ker(p)$.

Wir sagen, dass die Einbettung i zerfällt, wenn es einen Homomorphismus $r : G \to N$ gibt mit $ri = \mathrm{id}_N$. r heißt Retrakt von i.

Analog nennen wir die Projektion p zerfallend, wenn es einen Homomorphsimus $s : H \to G$ gibt mit $ps = \mathrm{id}_H$. s heißt Schnitt von p.

Zeigen Sie:

G ist direktes Produkt von N und H genau dann, wenn es einen Retrakt r gibt.

G ist semidirektes Produkt von N und H genau dann, wenn es einen Schnitt s gibt.