Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 1

Abgabe bis zum Mittwoch, den 26. Oktober 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

1.1 Bestimmen Sie alle Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x + 2y = 1, \quad 4x + 3y = 2.$$

Ermitteln Sie analog sämtliche Lösungen von

$$4x + 2y = -2, \quad -2x - y = 1.$$

1.2 Man stelle das Polynom $p(x) = (2x^2 + 3)(x^3 - x^2 + 1)$ in vollständig ausmultiplizierter Form (also ohne Klammerausdrücke) dar. Weiterhin drücke man das Polynom $q(x) = 3x^2 + 4x - 4$ als Produkt linearer Polynome aus. Schließlich gebe man die Ableitungen $p'(x)$ und $q'(x)$ an.

1.3 Die beiden folgenden Ausdrücke sind nach x aufzulösen, d.h. geben Sie eine explizite Formel für x in Abhängigkeit von a bzw. b an:

$$\frac{a + x}{a - x} = 2a + 1$$

sowie

$$(x + b)^2 - x^2 = b$$

1.4 For the complex number $z = 1 - 2i$ compute z^2 and $1/z$ and $\sqrt{z}$. Represent all these numbers in trigonometrical form and draw them in the Gaussian plane.

Vorlesung:	Klaus Altmann	`altmann@math.fu-berlin.de`	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	`petersen@math.fu-berlin.de`	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	`rbirkner@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	`mlenz@math.fu-berlin.de`	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter `http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html`

Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 2

Abgabe bis zum Mittwoch, den 2. November 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

2.1 Für eine Menge X mit Teilmenge $A \subseteq X$ ist $\mathcal{C}(A) := X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ das *Komplement* von A in X. Beweisen Sie für beliebige $A, B, C \subseteq X$ die vier Aussagen

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2}$$
$$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \tag{3}$$
$$\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B). \tag{4}$$

Die ersten beiden Regeln sind die beidseitige Distributivität von $\cap$ und $\cup$. Die anderen zwei Aussagen heißen DeMorgansche Regeln.

2.2 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen. Für Teilmengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$ entscheide man, welche der folgenden Aussagen immer wahr sind (Beweis oder Gegenbeispiel).

$$f(A \cap A') \stackrel{?}{=} f(A) \cap f(A') \tag{1}$$
$$f(A \cup A') \stackrel{?}{=} f(A) \cup f(A') \tag{2}$$
$$f^{-1}(B \cap B') \stackrel{?}{=} f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \tag{3}$$
$$f^{-1}(B \cup B') \stackrel{?}{=} f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \tag{4}$$

2.3 Gegeben seien die zwei Mengen $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = \{a, b, c, d, e\}$. Bestimmen Sie die Anzahl

a) aller Abbildungen $X \to Y$,
b) aller injektiven Abbildungen $X \to Y$,
c) aller surjektiven Abbildungen $Y \to X$,
d) aller bijektiven Abbildungen $X \to X$,
e) aller nichtleeren Teilmengen von Y.

2.4 Let $X = \{1, 2, 3\}$ be a set with three elements and consider the set of all bijections of X, i.e. $G := \{f : X \to X \text{ bijection}\}$. Prove that G is a group (using composition of maps) with six elements. Show also that G is not isomorphic to $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 3

Abgabe bis zum Mittwoch, den 9. November 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

3.1 Welche der folgenden Relationen $\sim$ auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind Äquivalenzrelationen? Für diese gebe man drei verschiedene Elemente der Äquivalenzklassen zu 1 sowie $\sqrt{2}$ an.

a) $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$
b) $x \sim y \iff |x - y| < 1$
c) $x \sim y \iff x = y$ oder $x, y \in \mathbb{Z}$
d) $x \sim y \iff x \leq y$
e) $x \sim y \iff x = 2^k y$ für ein $k \in \mathbb{Q}$

Für welche Äquivalenzrelationen gilt $\overline{1} = \overline{2} \in \mathbb{R}/_\sim$? Und $\overline{1} = \overline{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}/_\sim$?

3.2 Für eine beliebige Menge X sei $P := 2^X$ die Menge aller Teilmengen von X. Weiter sei eine Teilmenge $Z \subset X$ gegeben. Wir definieren eine Relation auf P durch $A \sim B \iff (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset Z$ für $A, B \in P$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf P gibt. Was sind die Äquivalenzklassen der leeren Menge $\varnothing \in P$ sowie der Menge $X \in P$?

3.3 Wir betrachten die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für ein $n \in \mathbb{Z}$). Zeigen Sie, dass die mittels Repräsentanten erklärten Operationen $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$ und $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ tatsächlich wohldefiniert sind.
Für welche $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $x^2 + \overline{1} = \overline{0}$?

3.4 Use the Euclidean algorithm to find integers m and n with $457m + 329n = 1$.

Vorlesung:	Klaus Altmann	`altmann@math.fu-berlin.de`	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	`petersen@math.fu-berlin.de`	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	`rbirkner@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	`mlenz@math.fu-berlin.de`	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter `http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html`
Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 4

Abgabe bis zum Mittwoch, den 16. November 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

4.1 Zeigen Sie, dass die Menge

$$K := \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$$

als Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Körper ist!

4.2 Man bestimme $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} n &\equiv 14 \mod 23 \qquad \text{und} \\ n &\equiv 12 \mod 15. \end{aligned}$$

Man finde das Urbild $f^{-1}(\overline{14}, \overline{2})$ des Isomorphismus $f : \mathbb{Z}/115\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

4.3 Die *Charakteristik* eines Ringes R (mit 1) ist die kleinste positive ganze Zahl $\text{char}(R)$ mit $\text{char}(R) \cdot 1 = 1 + \cdots + 1 = 0$. Wir setzen $\text{char}(R) := 0$, falls $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n > 0$ gilt.

a) Zu $n \in \mathbb{N}$ gebe man einen Ring R mit $\text{char}(R) = n$ an.
b) Man zeige, dass $\text{char}(R)$ eine Primzahl oder 0 ist für nullteilerfreie Ringe R. Gilt die Umkehrung, d.h. folgt R nullteilerfrei aus $\text{char}(R)$ prim bzw. 0?
c) Können Sie etwas über $\text{char}(R \times R')$ für zwei Ringe R, R' sagen?

4.4 Show that the matrix subring

$$C := \{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset M(2, \mathbb{R})$$

is isomorphic to the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. What ring isomorphism $C \xrightarrow{\sim} C$ corresponds to complex conjugation?

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html
Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 5

Abgabe bis zum Mittwoch, den 23. November 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

5.1 Konstruieren Sie einen Körper K mit vier Elementen! Ist er eindeutig (bis auf Isomorphie)?

5.2 Für zwei Matrizen $A, B \in M(2, \mathbb{R})$ beweise man $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Zur Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ definieren wir die *Adjugierte* $\mathrm{adj}(A) := \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_2$. Geben Sie damit eine Beschreibung der Einheitengruppen $M(2, \mathbb{R})^*$ und $M(2, \mathbb{Z})^*$ der Matrizenringe an.

5.3 Finden Sie alle $x, y \in \mathbb{F}_7$ mit

$$2x + 5y = 1, \quad 3x + 4y = 6.$$

5.4 Compute the determinants of the following two matrices (where a and b are real parameters):

$$A(a) := \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 3 & -a \end{pmatrix}, \qquad B(b) := \begin{pmatrix} -b & -2 \\ 3 & 2-b \end{pmatrix}.$$

For which values of a and b do $\det(A(a))$ and $\det(B(b))$ vanish?

Vorlesung:	Klaus Altmann	`altmann@math.fu-berlin.de`	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	`petersen@math.fu-berlin.de`	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	`rbirkner@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	`mlenz@math.fu-berlin.de`	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 6

Abgabe bis zum Mittwoch, den 30. November 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

6.1 Für $n = 31 \cdot 101$ bestimme man ein $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $g^{2023} \equiv 3 \ (n)$.

6.2 (Dieder-Gruppen)
a) Zeigen Sie, dass die Menge D_n der Drehungen und Spiegelungen (sowie deren Kombinationen) der Ebene, die ein vorgegebenes regelmäßiges n-Eck auf sich abbilden, eine Gruppe ist.
b) Sei $a \in D_n$ eine Spiegelung und $b \in D_n$ eine Drehung um $2\pi/n$. Zeigen Sie:

$$a^2 = \mathrm{id}, \quad b^n = \mathrm{id}, \quad aba = b^{-1}.$$

(Tipp: Man benutze das n-Eck der n-ten Einheitswurzeln $\xi_k := e^{2\pi ki/n} \in \mathbb{C}$. Dann kann man für a die komplexe Konjugation und für b die Multiplikation mit $\xi := \xi_1$ nehmen.)
c) Beweisen Sie, dass jedes Element $g \in D_n$ eindeutig in der Form $g = a^l b^k$ mit $l \in \{0, 1\}$ und $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ dargestellt werden kann.
Die Gruppe D_n wird als Dieder-Gruppe bezeichnet. (Di-eder= Zweiflächner, weil D_n auch als Gruppe aller Drehungen des Raumes entsteht, die die Doppelpyramide über dem n-Eck festlassen.)

6.3 Für eine Gruppe G ist $Z(G) := \{g \in G : gh = hg \forall h \in G\}$ das *Zentrum* von G. Man zeige, dass $Z(G)$ eine abelsche Gruppe ist. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$ der Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) = M(2, \mathbb{R})^*$ aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

6.4 Prove the following theorem of Cayley: A finite group G of order n is a subgroup of the permutation group S_n.
(Hint: For fixed $h \in G$, use the bijection $G \to G$, $g \mapsto hg$.)

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 7

Abgabe bis zum Mittwoch, den 7. Dezember 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

7.1 Wir betrachten die folgenden zwei Permutationen aus S_5:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \rho = (1\ 3\ 2)(4\ 5).$$

Man gebe $\rho\sigma$, $\sigma\rho$ und ρ^{-1} jeweils in Zykel- und Permutationsdarstellung an. Außerdem berechne man $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\rho)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma\rho)$.

7.2 Beweisen Sie, dass die Permutationsgruppe S_n von allen Transpositionen (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ erzeugt wird. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar die $n-1$ Transpositionen $(1, 2), \ldots, (n-1, n)$ ausreichen.

7.3 Für eine Gruppe G sei $\operatorname{Aut}(G)$ die Menge aller Gruppenautomorphismen; $\operatorname{Aut}(G)$ ist wieder eine Gruppe. Man zeige, dass die Abbildung

$$\tau : G \to \operatorname{Aut}(G), \quad g \mapsto \tau_g \text{ mit } \tau_g(h) := ghg^{-1} \text{ für alle } h \in G$$

ein Homomorphismus ist mit dem Kern $Z(G) := \{g_1 \in G \mid g_1 g_2 = g_2 g_1\ \forall g_2 \in G\}$. ($\tau$ heißt *Konjugation* mit g, oder auch ein *innerer Automorphismus* von G; den Normalteiler $Z(G) \subset G$ nennt man das *Zentrum* von G.)

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie weiterhin, dass $\tau : S_6 \to \operatorname{Aut}(S_6)$ nicht surjektiv ist. (Bemerkung: Für alle $n \neq 2, 6$ gilt $\operatorname{Aut}(S_n) \cong S_n$.)
Tipp: Bestimmen Sie die minimalen Relationen der fünf Erzeuger $\sigma_i := (i, i+1)$; sie sind $\sigma_i^2 = (\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = (\sigma_i\sigma_j)^2 = 1$ für alle i, j, mit $|i-j| > 1$. Vergleichen Sie dann die Anzahl der Transpositionen mit der Anzahl der Permutationen vom Typ (2)(2)(2), wie etwa $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$.

$\operatorname{Aut}(S_n) = S_n$ für $n \neq 2, 6$ steht in Huppert, Endliche Gruppen I, Kapitel II Satz 5.5. Das Argument ist so: die Konjugationsklasse der Transpositionen enthält $\binom{n}{2}$ Elemente; für $n \neq 6$ gibt es keine andere Konjugationsklasse dieser Größe, die Involutionen enthält, also vom Typ $(2)(2)\cdots(2)$ ist.
Im Fall $n = 6$ gibt es $\binom{6}{2} = 15$ Transpositionen, aber auch $\binom{6}{2}\binom{4}{2}/3! = 15$ Permutationen vom Typ $(1, 2)(3, 4)(5, 6)$. S_6 wird erzeugt von $\sigma_i := (i, i+1)$ für $1 \leq i \leq 5$ mit Relationen $\sigma_i^2 = (\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = (\sigma_i\sigma_j)^2 = 1$ für $|i-j| > 1$. Die folgende Zuordnung $(1, 2) \mapsto (1, 2)(3, 4)(5, 6)$, $(2, 3) \mapsto (1, 5)(2, 4)(3, 6)$, $(3, 4) \mapsto (1, 2)(3, 5)(4, 6)$, $(4, 5) \mapsto (1, 3)(2, 4)(5, 6)$, $(5, 6) \mapsto (1, 2)(3, 6)(4, 5)$ erfüllt dieselben Relationen, gibt also einen Automorphismus $\tau : S_6 \xrightarrow{\sim} S_6$. Weil innere Automorphismen Transpositionen erhalten, muss τ ein äußerer Automorphismus sein.

Bemerkung: $\#\operatorname{Aut}(S_6) = 2 \cdot 6!$; τ erfüllt sogar $\tau^2 = \mathrm{id}$ und ist damit eindeutig bis auf Konjugation.

7.4 Show that a subgroup $U \subset G$ of index 2 (i.e. G/U consists has precisely two left cosets) is automatically normal. Conclude that $A_n \subset S_n$ is normal. Is the subgroup $\{id, (12)\} \subset S_3$ normal?

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116		
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115		
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a		
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31,	Di 8-10 π32	(Fach E4)	
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119,	Mi 12-14 I005	(Fach C1)	
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32,	Do 14-16 π25	(Fach E3)	

Die Aufgaben liegen auch unter `http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html`

Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 8

Abgabe bis zum Mittwoch, den 14. Dezember 2005 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

8.1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$?

a) $U_1 = \{(2t, -t, \sqrt{2}t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
b) $U_2 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$
c) $U_3 = \{(x, y, z) \mid xy = yz = 0\}$
d) $U_4 = \{(x, y, z) \mid x = 0 \text{ oder } z = 0\}$

8.2 Sei K ein Körper und $R := K[x, x^{-1}]$ der Ring aller Polynome in x und x^{-1} mit K-Koeffizienten. Man zeige, dass ein R-Modul das gleiche ist wie ein K-Vektorraum mit einem Automorphismus (einer invertierbaren linearen Abbildung).

8.3 Man zeige, dass für R-Moduln $P \subseteq M$ die Abbildung

$$\varphi : \{\text{Untermoduln } Q \subseteq M/P\} \to \{\text{Moduln } U \text{ mit } P \subseteq U \subseteq M\}, \qquad Q \mapsto \pi^{-1}(Q)$$

eine Bijektion ist; dabei ist $\pi : M \to M/P$ die kanonische Projektion. Für drei Moduln $P \subseteq U \subseteq M$ beweise man weiterhin

$$(M/P)/(U/P) \cong M/U,$$

indem man Kern und Bild der Abbildung $M/P \to M/U$ studiert.

8.4 Let $R := \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ and $M := \mathcal{C}(\mathbb{R})$ be the sets of differentiable and continuous functions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respectively. Provide R with a natural commutative ring structure and M with the structure of an R-module.

Vorlesung:	Klaus Altmann	`altmann@math.fu-berlin.de`	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	`petersen@math.fu-berlin.de`	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	`rbirkner@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	`mlenz@math.fu-berlin.de`	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter `http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html`

Forum zur Linearen Algebra unter `http://foren.spline.inf.fu-berlin.de`

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 9

Abgabe bis zum Mittwoch, den 4. Januar 2006 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

9.1 Es sei R ein Ring. Man zeige, dass die Bijektion

$$\varphi : M(n \times m, R) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(R^m, R^n)$$

ein Isomorphismus von R-Moduln ist, d.h. verträglich mit Summen und Skalarmultiplikation ist. Weiter zeige man, dass für $n = m$ diese Bijektion vermittels

$$\varphi^{-1} : \mathrm{End}_R(R^n) \xrightarrow{\sim} M(n \times n, R)$$

auch die Multiplikationen (d.h. Hintereinanderausführung von Endomorphismen bzw. Matrizenmultiplikationen) erhält.

9.2 Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ aller Polynome der Form $a_0x^2 + a_1x_1 + a_2$ mit $a_i \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Matrixdarstellung des Endomorphismus $d/dx : V \to V$, $p \mapsto dp/dx = p'$ (Ableitung).
(Geben Sie einen Isomorphismus $\psi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} V$ an (das entspricht Wahl einer Basis in V) und stellen Sie die lineare Abbildung $\psi^{-1} \circ d/dx \circ \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ als Matrix dar.)

9.3 Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $M := M(n, K)$ der K-Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K. Für eine Matrix $A \in M$ sei A^t die *transponierte Matrix*, die man aus A durch Spiegelung an der Hauptdiagonale erhält. Wir betrachten die Teilmengen der (anti)symmetrischen Matrizen:

$$M_s := \{A \in M \mid A^t = A\} \qquad \text{und} \qquad M_{as} := \{A \in M \mid A^t = -A\}.$$

Man zeige, dass M_s und M_{as} Untervektorräume von M sind und dass es einen Isomorphismus $M \cong M_s \oplus M_{as}$ gibt.

9.4 The set $V := \mathcal{C}^1([0, 2])$ of all differentiable functions $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ is an $\mathbb{R}$-vector space. Which $U_i \subset V$ are subspaces?

a) $U_1 := \{f \in V \mid f'(1) = f(2)\}$
b) $U_2 := \{f \in V \mid \int_0^2 f(t)\, dt = 0\}$
c) $U_3 := \{f \in V \mid f \text{ is monotone}\}$
d) $U_4 := \{f \in V \mid f \text{ is a polynomial}\}$

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html
Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 10

Abgabe bis zum Mittwoch, den 11. Januar 2006 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

10.1 Man bringe die folgende Matrix auf reduzierte Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Was ist der Rang dieser Matrix?

10.2 Es sei $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln, dabei sei M'' frei. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann ein Schnitt $s : M'' \to M$ von p existiert, d.h. s ist R-linear mit $ps = \mathrm{id}_{M''}$. (Nach Wahl einer Basis $e_1, \ldots, e_n$ von M'' kann man s definieren durch $s(e_i) := m_i$ wobei die $m_i \in p^{-1}(e_i)$ beliebige Urbilder sind.)
Man zeige, dass i und s einen Isomorphismus $(i, s) : M' \oplus M'' \xrightarrow{\sim} M$ geben.

10.3 Es sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und $U := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{(1, 2)\} \subset V$ eine Gerade durch den Ursprung. Wir betrachten den Quotienten V/U. Zeigen Sie, dass es keine zwei linear unabhängige Vektoren in V/U gibt. Bestimmen Sie außerdem einen Schnitt der exakten Sequenz $0 \to U \to V \to V/U \to 0$.

10.4 Let V be a K-vector space. For subspaces $U, U_1, \ldots, U_r \subseteq V$ with $r \leq \#K$ (the number of elements of K) show that $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i \iff \exists i \colon U \subseteq U_i$. Provide a counterexample for $r = \#K + 1$.
(Hint: Consider first the case $r = 2$ — it is also feasible to hand in a solution for this case.)

Sei $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} U_i$. Induktion $\rightsquigarrow$ wähle $v_i \in U$ mit $v_i \notin \bigcup_{j \neq i} U_j$ ($\implies$ $v_i \in U_i$). Es gibt $(\#K + 1)$ in $\mathbb{P}(V)$ verschiedene Vektoren $av_1 + bv_2$, also müssen zwei im selben U_j liegen $\implies$ $v_1, v_2 \in U_j \rightsquigarrow$ Widerspruch. Beispiel: $\mathbb{F}_2^2 = \mathbb{F}_2(1, 0) + \mathbb{F}_2(0, 1) + \mathbb{F}_2(1, 1)$.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html
Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 11

Abgabe bis zum Mittwoch, den 18. Januar 2006 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

11.1 Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2a & + & b & - & 3c & + & d & = & -3 \\ a & - & 3b & & & + & 3d & = & 2 \\ & - & 2b & + & c & + & 2d & = & 1 \\ 3a & & & - & 4c & + & 2d & = & -2 \end{array}$$

Rang ist 3 (Zeile 1+Zeile 2 = Zeile 3+Zeile 4), Hindernisse verschwinden.

11.2 Bestimmen Sie das Inverse der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & -8 & 8 \\ 2 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -96 & -27 & 8 \\ 25 & 7 & -2 \\ -11 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

11.3 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der folgende Unterraum

$$U := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1,-2,1,-1),(2,1,3,3),(3,-1,4,2),(1,1,1,0),(1,0,2,3)\}.$$

Man wähle aus den fünf Vektoren eine Basis aus.

11.4 A matrix $A \in M(n, m; \mathbb{Z})$ with integer entries can, on the one hand, be considered as the matrix $A_0 \in M(n, m; \mathbb{Q})$ (i.e. with rational entries) but, on the other hand, also as the matrix $A_2 \in M(n, m; \mathbb{F}_2)$ (i.e. with $\mathbb{F}_2$-entries). Present examples $A, B \in M(3, 3; \mathbb{Z})$ with $\operatorname{rk}_{\mathbb{F}_2}(A_2) = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(A_0)$ and $\operatorname{rk}_{\mathbb{F}_2}(B_2) < \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(B_0)$. Furthermore, prove the inequality $\operatorname{rk}_{\mathbb{F}_2}(C_2) \le \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}(C_0)$ for all $C \in M(n, m; \mathbb{Z})$.
(Hint: Consider the case $n = m = 2$ first — again you may hand in a solution for this situation.)

Rank dropping is caused by nontrivial linear relations among rows of a matrix. Relations among rows of A_0 can be given by integer linear combinations. Reducing modulo p yields the same relations for A_p. The reduction might add new nontrivial relations, of course.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/∼altmann/LEHRE/lina.html
Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 12

Abgabe bis zum Mittwoch, den 25. Januar 2006 um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

12.1 Es sei $A \in M(n, m; K)$ eine Matrix mit folgender Eigenschaft: für jeden Vektor $b \in K^n$ existiert genau eine Lösung $x \in K^m$ des Gleichungssystems $Ax = b$. Man zeige, dass A dann eine invertierbare (also insbesondere quadratische) Matrix ist.

12.2 Es sei $B \in M(n, m; K)$ eine beliebige Matrix mit $m \geq n$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
(a) $\mathrm{rk}(B) = n$ maximal
(b) es gibt ein Rechtssinverses, d.h. $R \in M(m, n; K)$ mit $BR = I_n$.

Finden Sie ein Rechtsinverses für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.3 Es sei V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie, dass eine Teilmenge $S \subset V$ Basis ist genau dann, wenn S eine maximale linear unbhängige Teilmenge ist (d.h. jede Erweiterung $S \cup \{v\}$ mit $v \in V$, $v \notin S$ wird linear abhängig).

12.4 Let V be a K-vector space of finite dimension and $\varphi : V \to V$ an endomorphism. Prove that the following three conditions are equivalent:
(a) φ is an isomorphism
(b) φ is injective
(c) φ is surjective.

Show by example that the condition '$\dim_K(V) < \infty$' cannot be dropped.
For bonus points you may also provide two examples of an endomorphism of a free module of finite rank which is injective (resp. surjective) but not an isomorphism.

Vorlesung:	Klaus Altmann	`altmann@math.fu-berlin.de`	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	`ploog@math.fu-berlin.de`	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	`petersen@math.fu-berlin.de`	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	`rbirkner@math.fu-berlin.de`	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	`mlenz@math.fu-berlin.de`	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	`sosna@math.fu-berlin.de`	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 13

Abgabe bis zum Mittwoch, den 1. Februar um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

13.1 Es sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie $\#K = p^n$. Tipp: Untersuchen Sie den kleinsten in K enthaltenen Körper!

13.2 Sei $U := \mathrm{span}_{\mathbb{F}_{11}}\{(3,4,-2,5),(-2,2,5,4),(4,-1,1,3)\} \subseteq \mathbb{F}_{11}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{F}_{11}^4/U$.

13.3 Es sei $V := \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg(f) \leq 3\}$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens drei mit reellen Koeffizienten. Weiter sei $U := \{f \in V : f(1) = 0, f'(0) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $U \subset V$ ein Unterraum ist und finden Sie Unterräume $C, C' \subset V$ mit $U \oplus C = U \oplus C' = V$. Können Sie C und C' so wählen, dass $C \cap C' = 0$ gilt?

13.4 Show that a decomposition $M \cong N_1 \oplus N_2$ of the R-module M into a direct sum is equivalent to giving R-linear maps $p_i : M \to N_i$ and $v_i : N_i \to M$ such that $p_i v_i = \mathrm{id}_{N_i}$ (for $i = 1, 2$) and $v_1 p_1 + v_2 p_2 = \mathrm{id}_M$.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116		
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115		
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a		
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31,	Di 8-10 π32	(Fach E4)	
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119,	Mi 12-14 I005	(Fach C1)	
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32,	Do 14-16 π25	(Fach E3)	

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html

Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 14

Abgabe bis zum Mittwoch, den 8. Februar um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

14.1 Erinnerung: Zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ in einer Gruppe heißen *konjugiert*, wenn ein $h \in G$ existiert mit $g_2 = hg_1h^{-1}$. Dies gibt eine Äquivalenzrelation, deren Klassen man *Konjugationsklassen* nennt.
Sei jetzt $G = \mathrm{GL}(n; K)$ die allgemeine lineare Gruppe über dem Körper K sowie $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen K-Vektorraumes V. Man zeige, dass Matrixdarstellungen $M_{BB}(\varphi)$ von φ bezüglich verschiedener Basen konjugiert sind.
Sind die beiden folgenden Matrizen konjugiert?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14.2 Die *Spur* einer quadratischen Matrix M ist die Summe der Einträge auf der Hauptdiagonalen. Für einen Endomorphismus $\varphi : V \to V$ des endlichdimensionalen K-Vektorraums zeige man, dass die Zahl $\mathrm{tr}(M_{BB}(\varphi))$ nicht von der Wahl der Basis $B \subset V$ abhängt.
Man folgere, dass $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to K$ eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

14.3 Es sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Nach Aufgabe 13.4 ist ein Endomorphismus $p : V \to V$ mit der Eigenschaft $p^2 = p$ gleichwertig mit der Darstellung $V = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$ als direkte Summe.
Gibt die folgende Matrix als Abbildung $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Projektion? Wenn ja, auf welchen Unterraum und mit welchem Komplement?

$$M = \begin{pmatrix} -25 & 26 & -78 \\ 5 & -4 & 15 \\ 10 & -10 & 31 \end{pmatrix}.$$

14.4 Wir betrachten den Vektorraum $M(2,2;K)$ aller 2×2-Matrizen über dem Körper K und die folgende Abbildung:

$$\varphi : M(2,2;K) \to M(2,2;K), \qquad A \mapsto A - A^t + \mathrm{tr}(A) \cdot I_2,$$

wobei A^t die zu A transponierte Matrix ist, $\mathrm{tr}(A)$ die Spur und $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass φ eine lineare Abbildung ist und stellen Sie sie bezüglich einer selbst gewählten Basis von $M(2,2;K)$ als Matrix dar.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116		
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115		
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a		
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31,	Di 8-10 π32	(Fach E4)	
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119,	Mi 12-14 I005	(Fach C1)	
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32,	Do 14-16 π25	(Fach E3)	

Die Aufgaben liegen auch unter http://page.mi.fu-berlin.de/~altmann/LEHRE/lina.html
Forum zur Linearen Algebra unter http://foren.spline.inf.fu-berlin.de

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra I, Serie 15

Abgabe bis zum Mittwoch, den 15. Februar um 14 Uhr
in die Tutorenfächer (Arnimallee, vor Raum 114)

15.1 Sei $V = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem Einheitsintervall. Wir betrachten für alle $x \in [0,1]$ die folgenden Abbildungen $V \to \mathbb{R}$

$$\delta_x(f) = f(x), \quad \delta'_x(f) = -f'(x), \quad \sigma_x(f) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \sigma'_x(f) = -\int_0^x f'(t)\,dt,$$

$$\alpha(f) = \int_0^1 t \cdot f'(t)\,dt, \quad \beta(f) = \int_0^1 f(t^2)\,dt, \quad \gamma(f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

Welche davon sind Linearformen auf V, also Elemente von $V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R})$? Geben Sie für diese alle linearen Relationen in V^* an!

15.2 Wir betrachten $W := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ mit } x_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele } n\}$, das ist der Vektorraum aller endlichen Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass der Dualraum W^* der Vektorraum aller Folgen ist, d.h. $W^* \cong \{\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ und beweisen Sie damit, dass die kanonische Abbildung $\theta_W : W \to W^{**}$ mit $\theta_W(w) : W^* \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(w)$ nicht surjektiv ist.

15.3 Es sei V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Wir definieren den *Annullator* von U als den Vektorraum

$$U^\perp := \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Welche der folgenden Konstruktionen sind sinnvoll:

$$V^*/U^* \;;\quad U^*/V^* \;;\quad (V/U)^* \;;\quad (U/V)^* \;;\quad V/U^\perp \;;\quad V^*/U^\perp\ ?$$

Welche der sinnvollen Konstruktionen sind isomorph zu U, $U^\perp$ oder U^*?

15.4 Für einen Vektorraum V seien zwei Basen $(e_1,\ldots,e_n)$ und $(v_1,\ldots,v_n)$ gegeben, und es sei S die Basiswechselmatrix, das heißt

$$v_i = \sum_{j=1}^n S_{ji} e_j.$$

Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix für die dualen Basen in V^*.

Vorlesung:	Klaus Altmann	altmann@math.fu-berlin.de	838-75428	Arnimallee 3, Raum 116
Aufgaben:	David Ploog	ploog@math.fu-berlin.de	838-75427	Arnimallee 3, Raum 115
Zentrale Übung:	Lars Petersen	petersen@math.fu-berlin.de	838-75398	Arnimallee 3, Raum 112a
Tutorien:	René Birkner	rbirkner@math.fu-berlin.de	Mo 14-16 π31, Di 8-10 π32	(Fach E4)
	Matthias Lenz	mlenz@math.fu-berlin.de	Mi 8-10 A119, Mi 12-14 I005	(Fach C1)
	Pawel Sosna	sosna@math.fu-berlin.de	Mo 8-10 π32, Do 14-16 π25	(Fach E3)