

Vorlesung Differentialtopologie

David Ploog (ploog@math.fu-berlin.de)

Wintersemester 2006/07 FU Berlin

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

- 1.1 Untermannigfaltigkeiten, abstrakte Mannigfaltigkeiten
- 1.2 Tangentialvektoren und Differentiale
- 1.3 lokale Diffeomorphismen und Überlagerungen, Submersionen und Urbilder, Immersionen und Einbettungen

2 Schnitttheorie

- 2.1 transversale Schnitte und Deformationen
- 2.2 Satz von Sard, Tangentialbündel, Zerlegung der 1, Whitney-Einbettung Mannigfaltigkeiten mit Rand, Orientierung
- 2.3 Deformation zum transversalen Schnitt (Normalenbündel, Tubenumgebung)
- 2.4 Schnitttheorie modulo 2 (damit Windungszahlen, Jordan-Brouwer, Borsuk-Ulam)
- 2.5 Orientierte Schnitttheorie (Abbildungsgrad, Euler-Charakteristik als $I(\Delta, \Delta)$, Poincaré-Hopf)

3 de Rham-Kohomologie

- 3.1 Tensoren und Differentialformen
- 3.2 Integration von Formen, Satz von Stokes
- 3.3 de Rham-Kohomologie, Poincaré-Lemma, Mayer-Vietoris-Folge und Beispiele
- 3.4 Poincaré-Dualität (Kohomologie mit kompaktem Träger, gute Überdeckungen) Abbildungsgrad, Kohomologieklass einer Untermannigfaltigkeit
- 3.5 Künneth-Formel und Lefschetz-Spurformel (Euler-Charakteristik als $\sum (-1)^i b_i$)

Nicht gemacht:

Einbettung nicht-kompakter Mannigfaltigkeiten zitiert aus **Wh**.

Existenz geodätisch konvexer Karten für gute Überdeckungen nur zitiert aus **Sp** Ex. 32(f), p. 491.

Morse-Theorie (knapp in **BT** §17, p. 220; ausführlich in **Mi**)

- BT** R. Bott, L. Tu: Differential Forms in Algebraic Topology, Springer GTM 82 (1982).
- GH** P. Griffiths, J. Harris: Principles of Algebraic Geometry, Wiley & Sons (1978)
- GP** V. Guillemin, A. Pollack: Differential Topology, Prentice-Hall (1974).
- H** M.W. Hirsch: Differential Topology, Springer GTM 33 (1976).
- Mi** J. Milnor: Morse Theory, Princeton University Press (1963)
- M** J.R. Munkres: Topology, Prentice-Hall (2000).
- S** M. Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry I, Publish or Perish (1979)
- W** F. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer GTM 94 ().
- Wh** H. Whitney: Differentiable Manifolds, Annals of Math. 2/37 (1936).

Die beiden wesentlichen Bücher zur Vorlesung sind **GP** (Untermannigfaltigkeiten und Schnitttheorie) sowie **BT** (de Rham-Kohomologie). Weitere und weiterführende Literatur:

M: Parakompaktheit in §41, Zerlegung der 1 in §36

GH: Lefschetz-Spurformel in 3.4

W: Lie-Gruppen, Garbenkohomologie und Äquivalenz aller Kohomologietheorien

H: Approximationstheorie, Kobordismen

Aufgaben zur Differentialtopologie

Aufgabe 1. Es sei $X \subset \mathbb{R}^3$ das durch die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ definierte Hyperboloid. Zeigen Sie, dass X eine Mannigfaltigkeit ist und fertigen Sie ein Bild an. Bestimmen Sie die Tangentialräume $T_p X$ und $T_q X$ (als Unterräume von \mathbb{R}^3) für $p = (2, 0, 0)$ und $q = (2, 1, 1)$; zeichnen Sie diese ein.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden zwei Karten für den Nordpol $N = (0, 0, 1)$ der 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : B_1(0) &\rightarrow S^2, & (s, t) &\mapsto (s, t, \sqrt{1 - s^2 - t^2}) \\ \varphi_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 & &\text{durch stereographische Projektion} \end{aligned}$$

Wir schreiben die Koordinatensysteme als $\varphi_1^{-1} = (x_1, x_2)$ und $\varphi_2^{-1} = (y_1, y_2)$. Drücken Sie die Tangentialvektoren $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ durch die $\frac{\partial}{\partial y_j}(p)$ aus für $p = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ sowie $p = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Stellen Sie außerdem in beiden Basen den Tangentialvektor dar, der durch den Großkreis zwischen diesen zwei Punkten gegeben wird.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $M(2)_1 := \{A \in M(2) : \text{rk}(A) = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Zeigen Sie allgemeiner, dass die Menge $M(n, m)_r$ der $n \times m$ -Matrizen vom Rang r eine Mannigfaltigkeit ist. Was ist die Dimension von $M(n, m)_r$?

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass der Rang einer glatten Abbildung generisch nur steigen kann. D.h. dass für $f : X \rightarrow Y$ glatt, $p \in X$ und $\text{rk}(df_p) = r$ eine Umgebung $U(p) \subset X$ existiert mit $\text{rk}(df_x) \geq r$ für alle $x \in U$.

Aufgabe 5. Für welche $a > 0$ schneiden sich die Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und das Hyperboloid $x^2 + y^2 = a + z^2$ transversal? Zeichnen Sie die verschiedenen Schnitte, die auftreten können.

Aufgabe 6. $X, Z \subset Y$ seien transversale Untermannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass für alle $y \in X \cap Z$ gilt: $T_y(X \cap Z) = T_y X \cap T_y Z$. Finden Sie nicht-transversale Untermannigfaltigkeiten, deren Durchschnitt dennoch eine Mannigfaltigkeit der korrekten Kodimension ist. Gilt die obige Formel für die Tangentialräume dann immer noch?

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die Hopf-Faserung $S^3 \rightarrow S^2$ eine lokal-triviale Faserung mit Fasertyp S^1 ist. Warum ist sie nicht global trivial?

(Eine Beschreibung der Hopf-Faserung benutzt stereografische Projektion $S^2 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, die Projektion $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ sowie $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ als Einheitskugel.)

Zusatz: Ist das Hopf-Bündel ein Unterbündel von TS^2 ?

Aufgabe 8. Jede kompakte n -Mannigfaltigkeit besitzt eine Immersion in den \mathbb{R}^{2n} .

Zeigen Sie, dass der gelochte Torus $(S^1 \times S^1) \setminus \{p_0\}$ sogar in den \mathbb{R}^2 immersiert werden kann.

Aufgabe 9. Für eine Mannigfaltigkeit X mit Rand zeige man $\partial\partial X = \emptyset$. Falls $\partial X = \emptyset$ gilt, finde man eine Mannigfaltigkeit Y mit Rand $\partial Y = X$. Wenn X kompakt ist, kann man dann Y auch kompakt wählen?

Aufgabe 10. Welches Orientierungsverhalten haben die folgenden Abbildungen?

$c : \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$	Konjugation
$a : S^n \xrightarrow{\sim} S^n$	antipodale Abbildung
$b : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3, (x_0 : \dots : x_3) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$	
$h : S^3 \rightarrow S^2$	Hopf-Faserung

Aufgabe 11. Es sei $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ mit komplexen Koordinaten z_0, z_1 . Wir betrachten

$$X := \{((z_0, z_1), (w_0 : w_1)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : z_1 w_0 = z_0 w_1\}$$

mit den beiden Projektionen $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ und $p : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

- a) X ist eine 4-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit.
- b) $\pi|_U : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist Isomorphismus und $\pi^{-1}(0) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.
- c) $p : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ist ein Vektorbündel vom Rang 2 auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.
- d) X ist diffeomorph zur zusammenhängenden Summe von \mathbb{C}^2 und $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$; mit Orientierungen gilt sogar $X \cong \mathbb{C}^2 \# (-\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$.



$\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^2$ nennt man *Aufblasung* von \mathbb{C}^2 im Ursprung.

$p : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ heißt *tautologisches Bündel* auf $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für eine kontrahierbare Mannigfaltigkeit Y alle Schnittzahlen verschwinden: $I_2(f, Z) = 0$, wenn $f : X \rightarrow Y$ glatt, X kompakt und $Z \subset Y$ abgeschlossene Untermannigfaltigkeit (beide ohne Rand) mit $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$.

Folgern Sie daraus, dass eine kompakte, randlose Mannigfaltigkeit niemals kontrahierbar sein kann (mit Ausnahme von Punkten).

Aufgabe 13. Es sei $Z \subset Y$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit mit $\dim(Z) = \frac{1}{2} \dim(Y) =: n$. Zeigen Sie:

- Z ist durch n globale, unabhängige Funktionen gegeben, d.h. $Z = F^{-1}(0)$ für eine Submersion $F : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- \iff das Normalenbündel von Z in Y ist trivial, d.h. $N_Y Z \cong Z \times \mathbb{R}^n$
- $\implies I_2(Z, Z) = 0$

Beispiel: Der Kreis $Z = S^1$ wird im Möbiusband Y nicht durch eine Gleichung ausgeschnitten.

Aufgabe 14. Beweisen Sie folgende Version von Borsuk-Ulam: eine glatte, ungerade Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ hat nicht-verschwindende Windungszahl $W_2(f, 0) = 1$ bezüglich des Ursprungs.

[Tipp: Induktion über n mit der Zerlegung von S^n in Äquator und Polkappen.]

Aufgabe 15. Zeigen Sie $\deg(gf) = \deg(g) \deg(f)$ für glatte Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwischen kompakten, zusammenhängenden und randlosen Mannigfaltigkeiten.

Zeigen Sie $\deg(f_n) = n$ für $f_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 16. Wir betrachten den Torus $Y = S^1 \times S^1$ mit den zwei Kurven

$$B := S^1 \times \{1\}$$

$$C_n := \{(e^{2\pi i n t}, e^{2\pi i t}) : t \in [0, 1]\} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Berechnen Sie die Schnittzahlen $I(B, C_n)$ und $I(C_n, C_m)$ nach Orientierungswahlen für Y, B, C_n .

Aufgabe 17. Zeigen Sie mit Lefschetz-Abbildungen

$$\chi(S^k) = \begin{cases} 2, & 2|k \\ 0, & 2 \nmid k \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem $\chi(G) = 0$ für kompakte Lie-Gruppen G sowie $\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$ für X, Y kompakt, randlos, orientiert.

Können Sie mit dieser Methode auch $\chi(X) = \chi(B) \times \chi(F)$ für eine lokal-triviale Faserung $f : X \rightarrow B$ mit Fasertyp F zeigen? (Dabei sind B, F, X kompakt, randlos, orientiert.)

