

Numerik partieller Differentialgleichungen

Wintersemester 2008/09

Mitschrift von
Yves Radunz

Inhaltsverzeichnis

I	FDM - Finite-Differenzen-Methode	5
1	Diffusionsgleichung	7
1.1	Mathematisches Modell	7
1.2	Differenzenquotienten	8
1.3	Konvergenz	9
1.4	Stabilität	11
2	Wellengleichung	15
2.1	Mathematisches Modell	15
2.2	Zentrale Differenzen	15
2.3	Stabilität	16
3	Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	17
3.1	Charakteristiken	17
3.2	Finite Differenzen & Courant Friedrichs Levy (FD & CFL)	18
3.3	Lax-Wendroff	19
3.4	Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung	19
3.5	Lax-Wendroff-Schema für Wellengleichung	21
4	Elliptische und parabolische Probleme	23
4.1	Laplace-Gleichung	23
4.2	FDM	23
4.3	Parabolische Probleme	25
II	FEM - Finite Elemente Methoden	27
5	Bilinearformen	29
6	Sattelpunktprobleme und gemischte Formulierungen	37
7	Beispiele	43
7.1	Stokes-Gleichungen	46
7.1.1	MINI-Element	49
7.2	Taylor-Hood-FE für Stokes	51
7.3	FE-Räume in $H(\text{div})$	51
7.3.1	Zusatvorlesung statt Übung	56
7.3.2	Elastizitätsgleichungen mit Navier-Lamé-Gleichungen	58
7.3.3	MFEM	59
7.3.4	PEERS	59

8	Vertretungszeit	61
8.1	Definition eines Finiten Elementes nach Ciarlet	61
8.2	Interpolation	63
8.3	Diskreter Raum	64
8.4	Weitere FE	64
8.5	Bramble-Hilbert-Lemma	65
8.6	Transformationssatz	66
	8.6.1 Bemerkungen	66
8.7	Approximationssatz	67
8.8	Aubin-Nitsche-Technik (Dualität)	68
8.9	A priori Fehlerabschätzung für P_1^{NC} -FEM	69
9	A posteriori Fehlerkontrolle	73
9.1	Fehler und Residuen	73
	9.1.1 Untere Schranken im Modellbeispiel	74
9.2	Residuals and Discrete Testfunctions	77
9.3	Approximation Operators	84
9.4	Averaging A Posteriori Error Estimator	91
9.5	Implicit A Posteriori Error Control	95
	9.5.1 Localisation via partition of unity a posteriory error control	96
10	AFEM	101
	Index	111

Teil I

FDM -
Finite-Differenzen-Methode

Kapitel 1

Diffusionsgleichung

Vorlesung am 15.10.2008

Gegeben sind:

- *Medium* $\Omega =]0, L[$
- *Zeitintervall* $[0, T]$
- *Diffusionskoeffizient* $\kappa > 0$
- *Anfangsbedingungen* $u_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega)$
- *Randbedingungen*, z.B.
 - *Dirichlet*: $\forall t \in [0, T] : u(0, t) = 0 = u(L)$
 - *Neumann*: $\forall t \in [0, T] : \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L)$

1.1 Mathematisches Modell

Definition (Lösung eines Diffusions-Anfangswertproblems)

Eine Funktion $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lösung* des *Diffusions-Anfangswertproblems*, wenn:

1. Die Ableitungen u_t und u_{xx} existieren für fast alle Argumente in $Q = \Omega \times]0, T[$. Für jedes dieser Argumente gilt $u_t = \kappa u_{xx}$.
2. Die Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ gilt für fast alle $x \in \Omega$.
3. Die Randbedingung gilt für fast alle $t \in]0, T[$.

Bemerkung

1. *Konsistente Anfangs- und Randbedingungen* ermöglichen glatte Lösungen, z.B. u_0 glatt mit $u_0(0, 0) = 0 = u_0(L, 0)$. Dies ist im Einzelfall zu prüfen.
2. Es gilt das Maximumsprinzip:
 u nimmt das Maximum (oder Minimum) auf ∂Q an.
3. *Fourierzerlegung* der Anfangsdaten:

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Das Lösen der Probleme mit den Randwerten $u_0(x) = \sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)$ bzw. $u_0(x) = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ erlaubt eine Reihendarstellung der Lösung u .

1.2 Differenzenquotienten

Aus der Taylorentwicklung für ein Zeitinkrement $0 < \Delta t \ll 1$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t u_t(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x, t) + \dots$$

folgt die Darstellung durch *Vorwärtsdifferenzen*:

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x, t) - \frac{(\Delta t)^2}{6} u_{ttt}(x, t) - \dots$$

Analog erhalten wir mittels *zentraler Differenzen* im Ort für ein Ortsinkrement $0 < \Delta x \ll 1$:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx}(x, t) + \mathcal{O}((\Delta x)^4)$$

Aus $u_t = \kappa u_{xx}$ folgt an der Stelle (x, t) für eine exakte Lösung u :

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} &= \frac{\kappa(u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t))}{(\Delta t)^2} \\ &\quad + \frac{\Delta t u_{tt}(x, t)}{2} + \frac{(\Delta t)^2 u_{ttt}(x, t)}{6} - \frac{\kappa(\Delta x)^2 u_{xxxx}(x, t)}{12} \\ &\quad + \mathcal{O}((\Delta x)^4 + (\Delta t)^2) \end{aligned}$$

Eine Approximation U wird durch die *Differenzgleichung*

$$\frac{U(x, t + \Delta t) - U(x, t)}{\Delta t} = \frac{\kappa}{(\Delta t)^2} (U(x + \Delta x, t) - 2U(x, t) + u(x - \Delta x, t))$$

charakterisiert, die auf einem Gitter zu den Schrittweiten $(\Delta x, \Delta t)$ gilt.

Definition (Uniformes Gitter)

Ein *uniformes Gitter* $(x_m, t_m)_{\substack{n=0, \dots, N \\ m=0, \dots, M}}$ ist definiert vermöge $x_m = m\Delta x$, $\Delta x = \frac{L}{M}$ und $t_n = n\Delta t$,

$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$

Damit erhalten wir ein diskretes Problem: Man berechne $(U_{m,n}) \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (N+1)}$ mit:

1. Differenzgleichung

$$\frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{\Delta t} = \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}), m = 1, \dots, M-1, n = 1, \dots, N-1$$



2. Randbedingungen $U_{0,n} = 0 = U_{M,n}, n = 1, \dots, N$
3. Anfangsbedingungen $U_{m,0} = u_0(x_m), m = 1, \dots, M-1$

Mit Hilfe der Differenzgleichung lässt sich $U_{m,n+1}$ aus $U_{m+1,n}$, $U_{m,n}$ und $U_{m-1,n}$ berechnen. Hierzu kann man das *explizite Eulerverfahren* verwenden:


$$U_{m,n+1} = \begin{cases} 0 & , m \in \{0, M\} \\ U_{m,n} + \kappa \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}) & , m = 1, \dots, M-1 \end{cases}$$

Vorlesung am 20.10.2008

Bemerkung

Vorwärtsdifferenzen in der Zeit führen auf das explizite Euler-Verfahren mit Symbol . Rückwärtsdifferenzen bei t_n führen auf *implizite Euler-Verfahren* (*backward Euler*, *implicit Euler*). 

$$\frac{U_{m,n} - U_{m,n-1}}{\Delta t} = \kappa \frac{U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

Dies führt auf das Symbol  für alle $m = 1, 2, \dots, M - 1$ zuzüglich der Randbedingungen $U_{0,n} = 0 = U_{M,n}$. Damit ergibt sich das Gleichungssystem


$$\begin{pmatrix} -\nu & 1 - 2\nu & -\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\nu & 1 - 2\nu & -\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{0,n} \\ \vdots \\ U_{M,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,n-1} \\ \vdots \\ U_{M-1,n-1} \end{pmatrix}$$

mit $\nu = \kappa \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} U_{0,m} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1 - 2\nu & -\nu \\ -\nu & \ddots \\ 0 & \ddots & -\nu & 1 - 2\nu \end{pmatrix}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{1,n-1} \\ \vdots \\ U_{M-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Crank-Nicolson: $CN = \frac{1}{2} \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right)$
 Allgemeine ϑ -Mittelpunktsformeln (für $\vartheta \in [0, 1]$): $(1 - \vartheta) \cdot \text{Diagram 1} + \vartheta \cdot \text{Diagram 2}$

$$U_{m,n+1} - U_{m,n} = \nu(1 - \vartheta)(U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}) + \nu\vartheta(U_{m+1,n+1} - 2U_{m,n+1} + U_{m-1,n+1})$$

Symbol: 

- $\vartheta = 0 \Rightarrow$ explizites Euler-Verfahren
- $\vartheta = 1 \Rightarrow$ implizites Euler-Verfahren
- $\vartheta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ CN

1.3 Konvergenz

Konsistenzfehler: Einsetzen der exakten glatten Lösung u in die Differenzenformel liefert einen Restterm. Die Taylor-Entwicklung bei x_m und $t_{n+\vartheta} = (n + \vartheta)\Delta t$ zeigt

$$U_{m,n+1} \approx u(x_m, t_{n+1}) = u(x_m, t_{n+\vartheta}) + (1 - \vartheta)\Delta t u_t(x_m, t_{n+\vartheta}) + \frac{(1 - \vartheta)^2 (\Delta t)^2}{2!} u_{tt}(x_m, t_{n+\vartheta})$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} &= u_t(x_m, t_{n+\vartheta}) + ((1 - \vartheta)^2 - \vartheta^2) \frac{\Delta t}{2!} u_{tt}(x_m, t_{n+\vartheta}) \\ &\quad + ((1 - \vartheta)^3 - \vartheta^3) \frac{(\Delta t)^2}{3!} u_{ttt}(x_m, t_{n+\vartheta}) + \dots \end{aligned}$$

Analog:

$$u_{xx}(x_m, t_n) = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

$$u_{xx}(x_m, t_{n+1}) = \frac{u_{m+1,n+1} - 2u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} - \frac{\kappa \vartheta}{(\Delta x)^2} (u_{m+1,n+1} - 2u_{m,n+1} + u_{m-1,n+1}) + \kappa \frac{1 - \vartheta}{(\Delta x)^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) \\ &= ((1 - \vartheta)^2 - \vartheta^2) \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_m, t_{n+\vartheta}) + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

CN hat Konsistenzordnung 2, alle anderen ϑ -Mittelpunktsformeln haben Konsistenzordnung 1.

Satz 1.1. *Konvergenzsatz*

Wenn $u \in C^4(\bar{Q})$ und $\kappa \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$, dann ist das explizite Euler-Verfahren konvergent und es gilt:

$$\max_{\substack{m=0, \dots, M \\ n=0, \dots, N}} |u(x_m, t_n) - U_{m,n}| = \mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Beweis:

Es sei $e_{m,n} = u_{m,n} - U_{m,n}$.

Die Taylor-Entwicklung wie oben zeigt nun für $-1 \leq \Theta_{m,n} \leq 1$ und $0 \leq \vartheta_{m,n} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{\Delta t} &= \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}) \\ \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\Delta t} &= \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}) \\ &\quad + \frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx}(x_m + \Theta_{m,n} \Delta x, t_n) + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_m, t_n + \vartheta_{m,n} \Delta t) \\ \Rightarrow \frac{e_{m,n+1} - e_{m,n}}{\Delta t} &= \frac{\kappa}{(\Delta x)^2} (e_{m+1,n} - 2e_{m,n} + e_{m-1,n}) \\ &\quad + \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{12} u_{xxxx}(x_m + \Theta_{m,n} \Delta x, t_n) + \frac{\Delta t}{2} u_{tt}(x_m, t_n + \vartheta_{m,n} \Delta t)}_{=M_{m,n}} \end{aligned}$$

Es gilt $\|M_{m,n}\| \leq C(\Delta t + (\Delta x)^2)$ für C , denn $|u_{tt}| + |u_{xxxx}|$ nimmt sein Maximum auf \bar{Q} an.

$$E_n = \max_{m=0, \dots, M} |e_{m,n}|, E_0 = 0, e_{n,0} = 0 = e_{n,M}$$

Aus

$$|e_{m,n+1}| \leq \kappa e_{m+1,n} + (1 - 2\nu) e_{m,n} + \kappa e_{m-1,n} + M_{m,n}$$

folgt:

$$E_{n+1} \leq (2\nu + |1 - 2\nu|)E_n + \Delta t C(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

Für $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ ist der Faktor vor E_n genau 1 und daher $E_{n-1} - E_n \leq \Delta t C(\Delta t + (\Delta x)^2)$. Summation für $n = 0, \dots, J$ zeigt

$$E_j \leq J\Delta t C(\Delta t + (\Delta x)^2) \leq TC(\Delta t + (\Delta x)^2)$$

□

Konvergenzsätze

Für $u \in C^4(\bar{C})$ sind iE und CN (ohne Bedingungen an ν) konvergent mit $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$ bzw. $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$

1.4 Stabilität

Definition (Stabilität)

Ein Differenzenverfahren $\hat{A}\hat{U}_n + \hat{B}\hat{U}_{n-1} = f_n, n = 1, \dots, N$ für Lösungen $\hat{U}_n = (\hat{U}_{0,n}, \dots, \hat{U}_{M,n})^t, f_n \in \mathbb{R}^{M+1}$ und $\hat{A}, \hat{B} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times (M+1)}$ sowie Randbedingungen $U_{0,n} = 0 = U_{M,n}$ heißt *stabil*, wenn:

- $A = \hat{A} \begin{pmatrix} 2, \dots, M \\ 2, \dots, M \end{pmatrix}, B = \hat{B} \begin{pmatrix} 2, \dots, M \\ 2, \dots, M \end{pmatrix}$ (wir entfernen den Rand der Matrizen \hat{A} und \hat{B})
- A ist regulär
- Für alle $e_0 \in \mathbb{R}^{M-1}$ bleibt die Folge (e_n) mit $Ae_n + Be_{n-1} = 0, n = 1, \dots, N$ unabhängig von N beschränkt.

Satz 1.2. (Lax-Äquivalenzsatz) *Stabilität und Konsistenz sind äquivalent zur Konvergenz.*

(ohne Beweis)

Satz 1.3. (Matrix-Methode) *Wenn der Spektralradius von $A^{-1}B$ kleiner oder gleich 1 ist und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes vom Betrag 1 höchstens 1 ist, dann ist das Differenzenverfahren stabil.*

Beweisidee: Jordanblöcke diskutieren!

Beispiele

Expliziter Euler:

$$A = 1, B = \begin{pmatrix} 1 - 2\nu & \nu & & 0 \\ \nu & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \nu \\ 0 & & \nu & 1 - 2\nu \end{pmatrix}$$

Es gilt $\lambda_j = 1 - 2\nu + 2\nu \cos\left(\frac{j\pi}{M}\right), j = 1, \dots, M - 1$.
Kritisch: $|1 - 4\nu| \leq 1 \Leftrightarrow \nu \leq \frac{1}{2}$

Von-Neumann-Methode (Fourier-Reihen-Methode)

Separationsansatz: $u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \exp(ij\pi x)$ zur Lösung von $u_t = u_{xx}$ in $Q =]0, 1[\times]0, \pi[$ suggeriert diskretes Analogon $U_{m,n} = \sum_{j=0}^M a_j(n) \exp(i\pi \Delta x j m), m = 0, \dots, M, n = 0, \dots, N$.

Einsetzen von Differenzgleichungen in Matrixform

Wann gilt nun die folgende Ungleichung?

$$\Rightarrow |q_j| = \left| \frac{a_j(n)}{a_j(n-1)} \right| = \left| \frac{1 - 2\nu(1 - \Theta)(1 - \cos(\pi \Delta x j))}{1 + 2\nu\Theta(1 - \cos(\pi \Delta x j))} \right| \leq 1$$

Darstellung von $|q_j|$:

$$\begin{aligned} |q_j| &= \frac{|1 - 2\nu(1 - \Theta)(1 - \cos(\pi \Delta x j))|}{1 + 2\nu\Theta(1 - \cos(\pi \Delta x j))} \\ &= \frac{|1 - 2\nu(1 - \Theta)(1 - \cos(\frac{j\pi}{M}))|}{1 + 2\nu\Theta(1 - \cos(\frac{j\pi}{M}))} \end{aligned}$$

Mit

$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 1 - 2(\sin x)^2, \quad s = \nu \sin\left(\frac{j\pi}{2M}\right)$$

erhalten wir also

$$|q_j| = \frac{|1 - 2(1 - \Theta) \cdot 2s|}{1 + 2\nu\Theta(1 - \cos(\frac{j\pi}{M}))}$$

Stabilität gilt also genau dann, wenn $|1 - 4s(1 - \Theta)| \leq 1 + 4\Theta s$. Das ist für $4s(1 - \Theta) \leq 1$ (und $\Theta \in [0, 1]$) immer richtig und für $4s(1 - \Theta) \geq 1$ ist dies $4s(1 - \Theta) - 1 \leq 1 + 4\Theta s \Leftrightarrow 2s(1 - 2\Theta) \leq 1$. Da s Werte zwischen 0 und ν annehmen kann, ist insgesamt Stabilität gegeben für $\frac{1}{2} \leq \Theta \leq 1$. Für $0 \leq \Theta < \frac{1}{2}$ muss $s \leq \frac{1}{2(1-2\Theta)}$ (oder auch $\nu \leq \frac{1}{2(1-2\Theta)}$) gelten.

Bemerkung

Stabilität für Θ -Mittelpunktsformel mit von-Neumann in praxi

Ansatz: $U_{m,n} = \lambda^n \exp(i\pi j \frac{m}{M})$ für $\lambda \in \mathbb{C}, j = 0, \dots, M$.

Einsetzen in FD-Formel und Division durch $\lambda^n \exp(i\pi j \frac{m}{M})$ liefert eine transzendente Gleichung für λ , nämlich:

$$(1 - 2\nu\Theta)U_{m,n+1} - \nu\Theta(U_{m+1,n+1} + U_{m-1,n+1}) = (1 - (1 - \Theta)2\nu)U_{m,n} + \nu(1 - \Theta)(U_{m+1,n} + U_{m-1,n})$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1 - 2\nu\Theta)\lambda - \nu\Theta\lambda \left(\exp\left(\frac{i\pi j}{M}\right) + \exp\left(-\frac{i\pi j}{M}\right) \right) \\ &= (1 - (1 - \Theta)2\nu) + \nu(1 - \Theta) \underbrace{\left(\exp\left(\frac{i\pi j}{M}\right) + \exp\left(-\frac{i\pi j}{M}\right) \right)}_{=2 \cos(\frac{\pi j}{M})} \end{aligned}$$

liefert

$$|\lambda| = \frac{|1 - 2\nu(1 - \Theta)(1 - \cos(\frac{\pi j}{M}))|}{1 + 2\nu\Theta(1 - 2 \cos(\frac{\pi j}{M}))}$$

Kapitel 2

Wellengleichung

2.1 Mathematisches Modell

Vorlesung am 22.10.2008

In den obigen Bezeichnungen von $\Omega =]0, L[$ und $Q = \Omega \times]0, T[$ seien $c > 0$ und u_0, u_1 Funktionen auf Ω . Dann lautet das *Anfangsrandwertproblem* (ARWP):

Man finde $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ (genügend glatt) mit

- $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ in Q (pDgl - partielle Differentialgleichung)
- $u(\cdot, 0) = u_0, u_t(\cdot, 0) = u_1$ in Ω (ABdg - Anfangsbedingungen)
- $u(0, \cdot) = 0 = u(L, \cdot)$ in $]0, T[$ (RBdg - Randbedingung)

Bemerkung

Eine glatte Lösung $u \in C^2(\overline{Q})$ erfordert konsistente (Ausgangs-)Daten.

2.2 Zentrale Differenzen


Bemerkung

Historisch zur Herleitung des ARWPs zuerst aufgestellt (Bernoulli)

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)$$

Zentrale Differenz in der Zeit plus derselben im Ort motiviert FDM:

$$\frac{U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{c^2}{(\Delta x)^2} (U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n})$$

Symbol: 

Mit $\mu^2 = c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$ liefert

$$U_{m,n+1} = \mu^2 (U_{m+1,n} + U_{m-1,n}) - U_{m,n-1} + 2(1 - \mu)U_{m,n}$$

einen expliziten Algorithmus sofern $U_{m,n}$ und $U_{m,n-1}$ für alle $m = 0, \dots, M$ gegeben sind.

Für $n = 2$ müssen wir also $U_{m,1}, m = 1, \dots, M - 1$ aus den Anfangswerten bestimmen:

Aus $\frac{U_{m,1} - U_{m,0}}{\Delta t} = u_1(x_m)$ folgt $U_{m,1} = u_0(x_m) + \Delta t u_1(x_m)$.

2.3 Stabilität

Der Fourier-Ansatz

$$U_{m,n} = \lambda^n \exp\left(i\pi j \frac{m}{M}\right), m = 0, \dots, M, n = 0, \dots, N$$

eingesetzt in FD-Formel und Division durch $\lambda^{n-1} \exp\left(i\pi j \frac{m}{M}\right)$ zeigt:

$$\lambda^2 = \mu\lambda \underbrace{\left(\exp\left(\frac{i\pi j}{M}\right) + \exp\left(-\frac{i\pi j}{M}\right)\right)}_{=2 \cos \alpha = 2\left(1 - 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} - 1 + 2(1 - \mu)\lambda$$

für $\alpha = \frac{\pi j}{M}$ und $A = 1 - 2\mu^2 \sin \frac{\alpha}{2} \in \mathbb{R}$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2A\lambda + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1/2} &= -A \pm \sqrt{A^2 - 1} \end{aligned}$$

Stabilität impliziert $|\lambda_1|, |\lambda_2| \leq 1$.

Prüfen für

- $-1 \leq A \leq 1 \Rightarrow |\lambda_i| = 1$
- $A > 1 \Rightarrow |\lambda_2| > 1$
- $A < -1 \Rightarrow |\lambda_1| > 1$

$$\Rightarrow |A| \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - 2\mu^2 \geq -1$$

$$\Rightarrow \mu^2 \leq 1 \text{ oder } \Delta t \leq c\Delta x$$

(CFL-Bedingung (*Courant-Friedrich-Levy*))

Interpretation: $\frac{1}{c}$ ist die *exakte Informationsgeschwindigkeit* und $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ die *diskrete Informationsgeschwindigkeit*. Die exakte Informationsgeschwindigkeit darf höchstens so groß sein wie die diskrete.

Kapitel 3

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

3.1 Charakteristiken

Partielle Differentialgleichung für einen (1D-)Transportvorgang:

$$u_t + a(x, t)u_x = 0 \quad (*)$$

Definition (Charakteristik)

Jede Lösung Y der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t) = a(Y(t), t)$$

heißt *Charakteristik* von (*).

Bemerkung

Jede Lösung u von (*) ist konstant längs der Charakteristik Y , denn

$$\frac{\partial u}{\partial t}(Y(t), t) = u_t(Y(t), t) + u_x(Y(t), t) \frac{\partial Y}{\partial t}(t) = (u_t + au_x)(Y(t), t) = 0$$

Beispiel

1. $a(x, t) = a$ ist unabhängig von x und t .
⇒ Charakteristiken sind Geraden der Steigung $\frac{1}{a} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ und somit lassen sich Lösungen (teilweise) aus Anfangsbedingungen konstruieren. Wenn Randbedingungen gegeben sind, können auch diese verwendet werden.
2. Gegeben sei $g \in C^1[a, b]$ streng monoton mit $g[a, b] = [-1, 1]$ und eine Umkehrfunktion $f : [-1, 1] \rightarrow [a, b]$. Wir setzen $u_- = f(-1)$ und $u_+ = f(1)$.

Aufgabe: Man konstruiere eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

mit Anfangsdaten

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_- & x < 0 \\ u_+ & x > 0 \end{cases}$$

(Ort $\Omega =]-1, 1[$, Zeit $[0, T]$)

Die Lösung lautet

$$u(x, t) = \begin{cases} u_- & x \leq -t \\ f\left(\frac{x}{t}\right) & |x| \leq t \\ u_+ & x \geq t \end{cases}$$

denn

$$u_t + g(u)u_x = f'\left(\frac{x}{t}\right) \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) + \frac{1}{t}g\left(f\left(\frac{x}{t}\right)\right) f'\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

Vorlesung am 27.10.2008

3.2 Finite Differenzen & Courant Friedrichs Levy (FD & CFL)

Vorwärtsdifferenz

Vorwärtsdifferenz zu $u_t + a(x, t)u_x = 0$ lautet

$$\frac{U_{m,n+1} - U_{m,n}}{\Delta t} + \underbrace{a(x_m, t_n)}_{=a_{m,n}} \frac{U_{m,n} - U_{m-1,n}}{\Delta x} = 0$$

Symbol: 

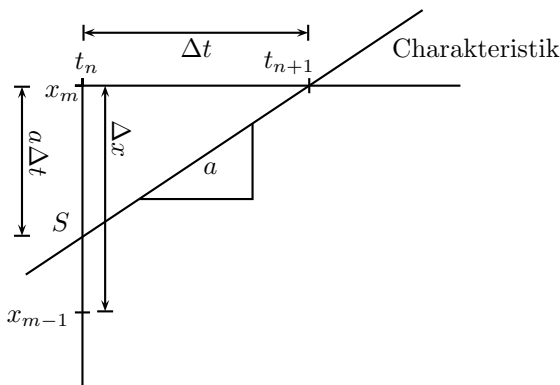
Der Konsistenzfehler ist $O(\Delta t + \Delta x)$.

Stabilitätsansatz: $U_{m,n} = \lambda^n \exp(i\pi j \frac{m}{n})$ für $m = 0, \dots, M$ und Konstanten $a = a_{m,n}$. Einsetzen in FD-Formel zeigt

$$\lambda - 1 + a \underbrace{\frac{\Delta t}{\Delta x}}_{=\mu} \left(1 - \exp\left(-\frac{i\pi j}{M}\right)\right) = 0$$

Dann ist $|\lambda| \leq 1$ äquivalent zu $|1 - a\mu(1 - \exp(-\frac{i\pi j}{M}))| \leq 1$. Notwendig für $j = M$ ist $|1 - 2a\mu| \leq 2$, d.h. $-1 \leq 1 - 2a\mu \leq 1$, also $0 \leq 2a\mu \leq 1$. Das ist die CFL-Bedingung.


Die geometrische Veranschaulichung der CFL-Bedingung für $a \geq 0$ und Charakteristik $Y(t) = at + \text{Konst.}$ von $u_t + au_x = 0$:



Die CFL-Bedingung $a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ bedeutet, dass S zwischen x_{m-1} und x_m liegt, d.h. die Information längs der Charakteristik können auf dem uniformen Gitter transportiert werden. Dies ist nicht erfüllt, wenn der Anstieg a zu groß oder negativ ist.

Upwind-Schema

Mit $a_{m,n} = a(x_m, t_n, U_{m,n}, \dots)$ definiert man

$$U_{m,n+1} = \begin{cases} (1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{m,n}) U_{m,n} + a_{m,n} \frac{\delta t}{\Delta x} U_{m-1,n} & a_{m,n} > 0 \\ (1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} a_{m,n}) U_{m,n} - a_{m,n} \frac{\delta t}{\Delta x} U_{m+1,n} & a_{m,n} < 0 \end{cases}$$


Bemerkung

Die CFL-Bedingung ist für $|a_{m,n} \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$ erfüllt.

Bemerkung

Der Konsistenzfehler ist $\mathcal{O}(\Delta t + \Delta x)$.

3.3 Lax-Wendroff

In der Taylor-Entwicklung

$$u(x_m, t_n + \Delta t) = u(x_m, t_n) + \Delta t u_t(x_m, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_m, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

einer glatten exakten Lösung u der Differentialgleichung $u_t = -au_x$ (a konstant) werden die Zeitableitungen durch Ortsableitungen ersetzt:

$$u_t(x_m, t_m) = -au_x(x_m, t_n)$$

$$u_{tt} = (-au_x)_t = -au_{xt} = -a(u_t)_x = -a(-au_x)_x = a^2 u_{xx}$$

Damit folgt:

$$u(x_m, t_n + \Delta t) = u(x_m, t_n) - \Delta t a u_x(x_m, t_n) + \frac{a^2 (\Delta t)^2}{2} u_{xx}(x_m, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Mit $s = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ ergibt sich die Lax-Wendroff-FDM:

$$U_{m,n+1} = U_{m,n} - \frac{s}{2} (U_{m+1,n} - U_{m-1,n}) + \frac{s^2}{2} (U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n})$$

mit Konsistenzfehler $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$ und CFL für $|s| \leq 1$.

3.4 Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

Für $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sei $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte exakte Lösung von $u_t + (F(u))_x = 0$ mit Anfangsbedingungen bei $t = 0$. Schreibweise: $f = F(u)$.

Taylor-Entwicklung:

$$u(x_m, t_n + \Delta t) = u(x_m, t_n) + \Delta t u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2} u_{tt}(x_m, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Mit der Zeitalbeitung

$$u_t = -f_x, u_{tt} = -f_{xt} = -f_{tx} = -(f_t)_x = -\underbrace{(Df(u) u_t)}_{=A} = (Af_x)_x$$

erhält man:

$$u(x_m, t_n + \Delta t) = u(x_m, t_n) - \Delta t f_x(x_m, t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2} (Af_x)_x(x_m, t_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3)$$

Mit $x_{m \pm \frac{1}{2}} = x_m \pm \frac{\Delta x}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned} f_x(x_{m+\frac{1}{2}}, t_n) &= \frac{f(x_{m+1}, t_n) - f(x_m, t_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ f_x(x_{m-\frac{1}{2}}, t_n) &= \frac{f(x_m, t_n) - f(x_{m-1}, t_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

$$(Af_x)_x(x_m, t_n) = \frac{\alpha(x_{m+\frac{1}{2}}, t_n) - \alpha(x_{m-\frac{1}{2}}, t_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2), \quad \alpha = Af_x$$

Mit

$$\begin{aligned} \alpha(x_{m+\frac{1}{2}}, t_n) &= DF \left(\frac{u(x_m, t_n) + U(x_{m+1}, t_n)}{2} \right) \cdot \frac{f(x_{m+1}, t_n) - f(x_m, t_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ \alpha(x_{m-\frac{1}{2}}, t_n) &= DF \left(\frac{u(x_{m-1}, t_n) + U(x_m, t_n)}{2} \right) \cdot \frac{f(x_m, t_n) - f(x_{m-1}, t_n)}{\Delta x} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

und $\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} u(x_m, t_{n+1}) &= u(x_m, t_n) - \frac{\mu}{2} (F(u(x_{m+1}, t_n)) - F(u(x_{m-1}, t_n))) \\ &\quad + \frac{\mu^2}{2} DF \left(\frac{u(x_{m+1}, t_n) + u(x_m, t_n)}{2} \right) (F(u(x_{m+1}, t_n)) - F(u(x_m, t_n))) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} DF \left(\frac{u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)}{2} \right) (F(u(x_m, t_n)) - F(u(x_{m-1}, t_n))) \\ &\quad + \Delta t \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2) \end{aligned}$$

für ausreichend glatte Funktionen F und u .

Lax-Wendroff

Mit

$$F_{m,n} = F(U_{m,n}), A_{m \pm \frac{1}{2}, n} = DF \left(\frac{U_{m \pm \frac{1}{2}, n} + U_{m,n}}{2} \right)$$

ergibt sich:

$$U_{m,n+1} = U_{m,n} - \frac{\mu}{2} (F_{m+1,n} - F_{m-1,n}) + \frac{\mu^2}{2} (A_{m+\frac{1}{2},n} (F_{m+1,n} - F_{m,n}) + A_{m-\frac{1}{2},n} (F_{m,n} - F_{m-1,n}))$$

Vorlesung am 29.10.2008

3.5 Lax-Wendroff-Schema für Wellengleichung

$$F \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

führt mit $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_x \end{pmatrix}$ auf

$$0 = \underline{u}_t + F(\underline{u})_x = \begin{pmatrix} (u_1)_t - \frac{(u_2)_x}{a^2} \\ (u_2)_t - (u_1)_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1)_t - a^{-2}(u_2)_x \\ (u_2)_t - (u_1)_x \end{pmatrix}$$

Dies ist äquivalent zu

$$(u_2)_t = (u_1)_x \quad \wedge \quad (u_1)_t = a^{-2}(u_2)_x$$

Wenn u die Wellengleichung $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ löst, dann ist $\underline{u} = (u_t, u_x)$ Lösung von $\underline{u}_t + F(\underline{u})_x = 0$ und kann mit Lax-Wendroff approximiert werden.

Kapitel 4

Elliptische und parabolische Probleme in mehrdimensionalen Gebieten

4.1 Laplace-Gleichung

Für

- einen Quader $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \dots \times]a_d, b_d[$
- $f \in C(\overline{\Omega})$
- $\Gamma_D = \partial\Omega$ abgeschlossen mit positivem Oberflächenmaß (D - Dirichlet)
- $u_D \in C(\Gamma_D)$
- $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ (N - Neumann)
- $g \in C(\Gamma_N)$

ist eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gesucht mit

- $f + \Delta u = 0$ in Ω
(Dabei bezeichnet $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ den Laplace-Operator.)
- $u = u_D$ auf Γ_D
- $g + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$
($\frac{\partial u}{\partial \nu}$ ist die Normalenableitung) auf Γ_N

4.2 FDM

Mit $M_1, \dots, M_d \in \mathbb{N}_{>1}$ und $\Delta x_j = \frac{b_j - a_j}{M_j} > 0$ wird $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x)$ approximiert durch

$$\frac{u(x - \Delta x_j e_j) - 2u(x) + u(x + \Delta x_j e_j)}{(\Delta x_j)^2}$$

wobei e_j der j -te kanonische Einheitsvektor im \mathbb{R}^d ist.

Für die Approximationen U_{m_1, \dots, m_d} , $m_j = 0, \dots, M_j$, $j = 0, \dots, d$ von $u(a_1 + m_1 \Delta x_1, \dots, a_d + m_d \Delta x_d)$ folgt:

$$-\sum_{j=1}^d \frac{U_{m_1, \dots, m_{j-1}, \dots, m_d} - 2U_{m_1, \dots, m_d} + U_{m_1, \dots, m_{j+1}, \dots, m_d}}{(\Delta x_j)^2} = f(a_1 + m_1 \Delta x_1, \dots, a_d + m_d \Delta x_d)$$

Demnach erhalten wir $\prod_{j=1}^d (M_j - 1)$ (für $j = 1, \dots, d$ und $m_j = 1, \dots, M_j - 1$) Unbekannte. Wir verwenden Randbedingungen für $m_j = 0$ oder $m_j = M_j$ mit

$$X = (a_1 + m_1 \Delta x_1, \dots, a_d + m_d \Delta x_d) \in \partial\Omega$$

1. Fall: $x \in \Gamma_D$

$$\Rightarrow u(x) = u_D(x) = U_{m_1, \dots, m_d} \text{ (bekannt)}$$

2. Fall: $x \in \Gamma_N$

$$\Rightarrow \nu(x) \text{ ist eindeutig und gleich } \pm e_j.$$

$$\frac{\partial U}{\partial \nu}(x) = -g(x) = F \frac{\partial U}{\partial x_j}(x)$$

Beispiel:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}(a_1, a_2 + m_2 \Delta x_2, \dots) = -u(a_1, a_2 + m_2 \Delta x_2, \dots) + u(a_1 + \Delta x_1, a_2 + m_2 + \Delta x_2, \dots) + \mathcal{O}(\Delta x_1)$$

d.h. man ersetzt U_{0, m_2, \dots, m_d} vermöge $-g(x) = \frac{U_{1, m_2, \dots, m_d} - U_{0, m_2, \dots, m_d}}{\Delta x_1}$. Das führt auf die weitere Unbekannte U_{0, m_1, \dots, m_d} und weitere Gleichungen.

Bemerkungen

1. Damit wird der Konsistenzfehler von bisher $\mathcal{O}(\sum(\Delta x_j)^2)$ auf $\mathcal{O}(\Delta x_1 + \sum(\Delta x_d)^2)$ vergrößert!
Besser: Höhere Differenzenquotienten verwenden, um quadratische Approximation zu gewährleisten.
2. Bei nicht geraden Rändern treten zusätzliche Approximationsfehler auf.

Beispiel

Es seien $d = 2, \Omega =]0, 1]^2, h = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \frac{1}{M}, M \in \mathbb{N}_{>1}, \Gamma_D = \partial\Omega$ mit lexikographischer Nummerierung der Unbekannten, d.h. $U_{1,1}, U_{1,2}, \dots, U_{1,M-1}, U_{2,1}, \dots$. Dann ist

$$A_n = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} T & -I & & 0 \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ 0 & & -I & T \end{bmatrix}$$

eine Blocktridiagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und den Nebendiagonaleinträgen $-I$, wobei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}$ ist.

4.3 Parabolische Probleme

Instationäre Wärmeleitungsgleichung:

- $\Omega =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_d, b_d[$ wie zuvor
- $u_t = \Delta u$ in $Q = \Omega \times]0, T[$
- $u = 0$ auf $\partial\Omega \times]0, T[$
- $u(\cdot, 0) = u_0 \in \Omega$

Ansatz: Diskretisierung der Zeit wie in 1.2 und im Ort wie in 4.2 für $f = u_t$ bzw. Zeitapproximation dazu.

TODO

Stimmen die Labels so?

Beispiel (Explizites Eulerverfahren)

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = -\frac{1}{(\Delta x)^2}AU^n$$

mit der Koeffizientenmatrix A für die Orstdiskretisierung

Beispiel (CN)

Aus $\nu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ folgt

$$(1 + \frac{\nu}{2}A)U^{n+1} = (1 - \frac{\nu}{2}A)AU^n$$

Bemerkungen

1. Das explizite Eulerverfahren ist stabil für $\nu \leq \frac{1}{4}$ und konvergent wie $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$.
Das implizite Eulerverfahren, bzw. CN, ist immer stabil und konvergent wie $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$, bzw. $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$.
2. Die Stabilitätsanalyse erfolgt mit dem Ansatz (für $d = 2$)

$$U_{m_1, m_2}^n = \lambda^n \exp(i\pi\Delta x_1 j_1 m_1) \exp(i\pi\Delta x_2 j_2 m_2)$$

3. ADI - Alternating Direction Implicit:

Aus CN erhält man

$$\begin{aligned} (1 - \frac{\nu}{2}\delta_{x_1}^2 - \frac{\nu}{2}\delta_{x_2}^2)U^{n+1} &= (1 + \frac{\nu}{2}\delta_{x_1}^2 + \frac{\nu}{2}\delta_{x_2}^2)U^n \\ \rightsquigarrow (1 - \frac{\nu}{2}\delta_{x_1}^2)U^{n+1} &= (1 + \frac{\nu}{2}\delta_{x_1}^2 + \nu\delta_{x_2}^2)U^n \\ \text{und } (1 - \frac{\nu}{2}\delta_{x_2}^2)U^{n+2} &= (1 + \frac{\nu}{2}\delta_{x_2}^2 + \nu\delta_{x_1}^2)U^{n+1} \end{aligned}$$

Teil II

FEM - Finite Elemente Methoden

Kapitel 5

Bilinearformen

Seien X, Y \mathbb{K} -Banach-Räume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) mit algebraisch-topologischen Dualräumen X^*, Y^* .

$A : X \rightarrow Y^*$ sei linear und stetig mit dualem Operator $A^* : Y^{**} \rightarrow X^*$ und $A^*(F) = F \circ A$.

(D.h. $\forall x \in X : \forall F \in Y^{**} : (A^*F)(x) = F(Ax)$)

Das ist in Dualitätsklammern: $\langle A^*F, x \rangle = \langle F, Ax \rangle$)

Wir definieren

$$Z = {}^\perp(\ker A^*) = \bigcap_{\Lambda \in \ker A^*} \ker \Lambda \subseteq Y^*$$

und

$$0 \leq \alpha = \inf_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|=1}} |(Ax)(y)| \leq \|A\|_{L(X, Y^*)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=\|Ax\|_{Y^*} \leq \|A\|_{L(X, Y^*)}}$

Satz 5.1.

1. $B : X \rightarrow Z, x \mapsto Ax$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\alpha > 0$.
2. A ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\alpha > 0$ und $\ker A^* = \{0\}$.
3. $\alpha > 0 \Rightarrow \|B^{-1}\|_{L(Z, X)} = \frac{1}{\alpha}$

Bemerkung

1. $\alpha > 0$ heißt inf-sup-Bedingung oder LBB-Bedingung nach Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi.
2. $\dim X + \dim Y < \infty \Rightarrow \alpha$ ist kleinster Singulärwert der Matrix zu A .
3. $\ker A^* = \{0\}$ bedeutet $\forall F \in Y^{**} \setminus \{0\} : \exists x \in X : 0 \neq (A^*F)(x)$. Falls zusätzlich Y reflexiv (d.h. $Y \cong Y^{**}$), bedeutet dies $\forall y \in Y \setminus \{0\} : \exists x \in X : (Ax)(y) \neq 0$.
4. $Z = \overline{\text{im } A}$

Beweise

1. Beweis der 4. Bemerkung:

$$\bigcap_{\Lambda \in \ker A^*} \ker \Lambda = Z = \overline{\text{im } A}$$

(a) „ \subseteq “

Sei $f \in Y^* \setminus \overline{\text{im } A}$.

Der Hahn-Banach-Trennungssatz für den Punkt f und abgeschlossenen linearen Unterraum $\overline{\text{im } A}$ besagt:

$$\exists G \in Y^{**} : \text{Re}(G(f)) < \text{Re}(G(\overline{\text{im } A})) = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \{0\} \end{cases}$$

($G(\overline{\text{im } A})$ ist Untervektorraum von \mathbb{K})

$$\Rightarrow G(\overline{\text{im } A}) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \overline{\text{im } A} \subseteq \ker G$$

$$\Rightarrow G \in \ker A^* \text{ (denn } A^*G = G \circ A = 0)$$

Da $f \notin \ker G$ folgt $f \notin \bigcap_{\Lambda \in \ker A^*} \ker \Lambda$.

$$\Rightarrow f \in Y^* \setminus {}^\perp(\ker A^*) = Y^* \setminus Z.$$

(b) „ \supseteq “

Sei $f \in \text{im } A$, d.h. $\exists x \in X : f = Ax$. Für $\Lambda \in \ker A^*$ folgt:

$$0 = (A^*\Lambda)(x) = (\Lambda \circ A)(x) = \Lambda(f)$$

$$\Rightarrow f \in \ker \Lambda$$

Da $\Lambda \in \ker A^*$ beliebig war, gilt $f \in \bigcap_{\Lambda \in \ker A^*} \ker \Lambda$.

Also ist $\text{im } A \subseteq {}^\perp(\ker A^*)$ abgeschlossen.

$$\Rightarrow \overline{\text{im } A} \subseteq {}^\perp(\ker A^*) \quad \square$$

2. Beweis der 1. Hälfte des Satzes: $\alpha > 0 \Rightarrow B : X \rightarrow Z$ isomorph.

A und B sind injektiv (denn $Ax = 0 \neq x \Rightarrow \alpha \leq 0$).

Also $C : X \rightarrow \text{im } A, x \mapsto Ax$ ist eine lineare und stetige Bijektion.

Lipschitz-Stetigkeit: für alle $f \in \text{im } A$ (d.h. $x \in X, f = Ax$) gilt: $\alpha \|x\|_X \leq \|Ax\|_{Y^*}$ mit $x = C^{-1}f$ und $Ax = f$.

Also $\|C^{-1}\|_{L(\text{im } A, X)} \leq \frac{1}{\alpha}$. Da $C^{-1} \text{im } A \rightarrow X$ stetig ist mit X auch $\text{im } A$ vollständig, also abgeschlossen, d.h. $\text{im } A = \overline{\text{im } A} = Z$.

Also sind A und C Isomorphismen. □

3. Für abgeschlossenes $\text{im } A$ ist A genau dann surjektiv, wenn A^* injektiv ist, d.h.

$$A \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow {}^\perp(\ker A^*) = Y^*.$$

(a) „ \Leftarrow “

Wenn A^* injektiv ist, dann gilt $\bigcap_{\Lambda \in \ker A^* = \{0\}} \ker \Lambda = Y^*$, also ist A surjektiv.

(b) „ \Rightarrow “

Wenn A surjektiv ist, gilt

$$\forall F \in \ker A^* \setminus \{0\} :$$

$$\Rightarrow \exists g \in Y^* : F(g) \neq 0, \text{ d.h. } g \notin \ker F$$

$$\Rightarrow g \notin \bigcap_{\Lambda \in \ker A^*} \ker \Lambda = {}^\perp(\ker A^*) \neq Y^* \text{ (Widerspruch, da } A \text{ surjektiv ist!)}$$

Also muss $\ker A^* = \{0\}$ gelten. □

4. Wenn B isomorph auf Z ist, dann gilt $\alpha = \|B^{-1}\|_{L(Z, X)} > 0$.

$$\begin{aligned}
 \|B^{-1}\|_{L(Z,X)} &= \sup_{g \in \text{im } A, \|g\|_{Y^*}=1} \|B^{-1}g\|_Z && \text{im } A \text{ ist dicht in } Z \\
 &= \sup_{\substack{x \in X \\ \|Ax\|_{Y^*}=1}} \|x\|_X \\
 &= \sup_{\substack{x \in X \\ Ax \neq 0}} \frac{\|x\|_X}{\|Ax\|_{Y^*}} \\
 &= \frac{1}{\inf_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_{Y^*}}{\|x\|_X}} \\
 &= \frac{1}{\alpha}
 \end{aligned}$$

Notation

X und Y seien reflexive, reelle Banachräume und $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ sei bilinear und stetig mit

$$\exists M = \sup_{\substack{x \in X, \\ \|x\|_X=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y=1}} a(x, y) < \infty$$

Definition

$$A_1 : X \rightarrow Y^*, x \mapsto a(x, \cdot)$$

$$A_2 : Y \rightarrow X^*, y \mapsto a(\cdot, y)$$

$$0 \leq \alpha_1 = \inf_{x \in X, \|x\|_X=1} \sup_{y \in Y, \|y\|_Y=1} a(x, y) \leq M$$

$$0 \leq \alpha_2 = \inf_{y \in Y, \|y\|_Y=1} \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} a(x, y) \leq M$$

Vorlesung am 05.11.2008

Satz 5.2.

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) $\forall F \in Y^* : \exists! x \in X : a(x, \cdot) = F$

(b) $\forall G \in X^* : \exists! y \in Y : a(\cdot, y) = G$

(c) $\alpha_1 > 0$ und $\forall y \in Y \setminus \{0\} : \exists x \in X : a(x, y) \neq 0$

(d) $\alpha_2 > 0$ und $\forall x \in X \setminus \{0\} : \exists y \in Y : a(x, y) \neq 0$

2. $A_1 = A_2^*, A_2 = A_1^*$ und jede der Aussagen (a) bis (d) impliziert

$$\|A_1^{-1}\|_{L(Y^*, X)} = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2} = \|A_2^{-1}\|_{L(X^*, Y)}$$

Beweis:

1. Der vorhergehende Satz (5.1) besagt:

$$A_j \text{ Isomorphismus} \Leftrightarrow \alpha_j > 0 \wedge \ker A_j^* = \{0\}$$

Damit folgt (a) \Leftrightarrow (c) und (b) \Leftrightarrow (d).

2. Zum Beweis von $A_1^* = A_2$ seien $x \in X$ und $y \in Y$. Zu zeigen ist nun $A_1^*(y)(x) = A_2(y)(x)$.
Dann gilt für $(A^*, y)(x)$ mit $\delta_Y \in Y^{**}$, d.h. $\delta_y : Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ linear und stetig.

$$(A^*, y)(x) = (A_1^*, \delta_Y)(x) = (\delta_Y \circ A_1)(x) = \delta_Y(A, x) = \delta_y(a(x, \cdot)) = a(x, y) = (A_2 y)(x)$$

und so folgt $A_1^* = A_2$. (Analog für $A_2^* = A_1$.)

Als Aufgabe: $(A_i^*)^{-1} = (A_i^{-1})^*$ für den Isomorphismus A_i , $i = 1, 2$ und Dualnorm eines Operators und seines dualen Operators ist gleich.

□

Bemerkung

Eine Folgerung ist ein verallgemeinertes Lax-Milgram-Lemma in reflexiven Banachräumen:
Für $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, bilinear, stetig und X -elliptisch (das heißt: $\exists \alpha > 0 \forall x \in X : \alpha \|x\|_X^2 \leq a(x, x)$) mit reflexivem Banachraum X gilt $\forall F \in X^* \exists x \in X : a(x, \cdot) = F$.
Für X als Hilbertraum ist dies das Lax-Milgram-Lemma und falls a sogar symmetrisch ist, ist das der Rießeche Darstellungssatz.

Beispiel (Poisson-Problem)

Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^n . $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx$ für $u, v \in V = H_0^1(\Omega)$ definiert die stetige Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die symmetrisch und V -elliptisch ist (denn es gilt die Friedrichs-Ungleichung $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\frac{\text{diam}(\Omega)}{\pi}}_{=C_F} \|Dv\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $v \in V = H_0^1(\Omega)$).

a beschreibt die *schwache Form* des Poisson-Problems: Gesucht ist u sodass

$$\forall f \in L^2(\Omega) : \exists! u \in H_0^1(\Omega) : f + \Delta u = 0$$

im schwachen Sinn gilt.

Mit $p = Du \in L^2(U, \mathbb{R}^n)$ gilt $f + \text{div} p = 0$ und $p = \nabla u$. Eine schwache Formulierung zu diesen beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (*Primale Gemischte Formulierung* des Poisson-Problems) lautet

$$\forall f \in L^2(\Omega) : \exists!(u, p) \in V \times L^2(U, \mathbb{R}^n) = L : \forall v \in V, q \in L \text{ gilt}$$

$$\int_{\Omega} pq dx - \int_{\Omega} q \nabla u dx = 0 \tag{P}$$

$$- \int_{\Omega} p \nabla v dx = - \int_{\Omega} f v dx$$

(das war die *Primale Gemischte Formulierung* des Poisson-Problems)

Dies ist äquivalent zu:

Gesucht sind $(p, u) \in L^2(U, \mathbb{R}^n) \times V$ sodass für alle $q, v \in L^2(U, \mathbb{R}^n) \times V$ gilt:

$$A((p, u), (q, v)) = \int_{\Omega} (pq - q \nabla u - p \nabla v) dx = F(q, v) = - \int_{\Omega} f v dx$$

Aufgabe: Für jedes $(p, u) \in L \times V$ konstruiere man $(q, v) \in L \times V$ mit

$$A((p, u), (q, v)) \geq \frac{1}{6} \|(p, u)\|_X \|(q, v)\|_X$$

d.h. X -Elliptische Konstanten $\geq \frac{1}{6}$.

Beispiel (Lineare Elastizitätstheorie / Navier-Lamé-Gleichungen)

Für $n = 2, 3$ definieren wir $v \in V = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ und $Dv \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ sowie $\varepsilon(v) = \text{sym}(Dv) = \frac{Dv + (Dv)^t}{2} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}) = L$.

Die Kornsche Ungleichung zeigt dass $\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \approx \|v\|_{H^1(\Omega)}$ und ist trivial, falls $v = 0$ auf dem ganzen Rand $\partial\Omega$ gilt: z.B. wenn $n = 2$ und

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|v_{1,2} - v_{2,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} (v_{1,2} - v_{2,1})(v_{1,2} - v_{2,1}) \, dx \quad \text{für } v \in D(\Omega)^n \\ &= - \int_{\Omega} (v_1(v_{1,22} - \underbrace{v_{2,12}}_{=v_{2,21}}) - v_2(\underbrace{v_{1,21}}_{=v_{1,12}} - v_{2,11})) \, dx \\ \|v_{1,2} - v_{2,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|v_{1,2} + v_{2,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -4 \int_{\Omega} v_{1,2} v_{2,1} \, dx = 4 \int_{\Omega} v_{1,11} v_{2,2} \, dx \\ &\leq 2(\|v_{1,11}\|^2 + \|v_{2,2}\|^2) \quad (\text{Cauchy}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|asym(Dv)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \frac{1}{2} \|v_{1,2} - v_{2,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|v_{1,2} + v_{2,1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{111}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v_{2,2}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}$$

Lineares isotropes elastisches Materialverhalten wird modelliert vermöge

- $\mathbb{C}A = \lambda \text{tr}A \mathbf{1} + 2\mu A$
- $A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n}$, $\text{tr}(A) = A_{11} + \dots + A_{nn}$ und $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Einheitsmatrix.
- Lamé-Parametern $\lambda, \mu > 0$
- Spannungen $\sigma \in L$ als Funktion der Greenschen Verzerrungen $\varepsilon(u)$ via $\sigma = \mathbb{C}\varepsilon(u)$

Bei $n = 2$ und ESZ oder EVZ ist Vorsicht geboten!

Die Navier-Lamé-Differentialgleichungen lauten dann $f + \text{div}\mathbb{C}\varepsilon(u) = 0$. Da \mathbb{C} elliptisch ist, folgt schließlich, dass die dazugehörige Bilinearform a durch

- $a(u, v) = \int_{\Omega} \varepsilon(u) : \mathbb{C}\varepsilon(v) \, dx$
- $u, v \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) = V$

• $(A : B) = \sum_{j,k=1}^n A_{j,k} B_{j,k}$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ V -elliptisch
gegeben ist.

Vorlesung am 10.11.2008

Wir betrachten:

- $X_\ell \subseteq X, Y_\ell \subseteq Y$: endlich-dimensionale Teilräume der normierten linearen Räume X und Y
- $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform, d.h.

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X=1}} \sup_{\substack{y \in Y \\ \|y\|_Y=1}} a(x, y) = M < \infty$$

- $F \in Y^*, F_\ell = F|_{Y_\ell} \in Y_\ell^*$ $a_\ell = a|_{X_\ell \times Y_\ell} : X_\ell \times Y_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform

Diskretes Problem:

(P_ℓ)

Finde $x_\ell \in X_\ell$ mit $a_\ell(x_\ell, \cdot) = F_\ell$ in Y_ℓ , sodass:

$$0 \leq \alpha_\ell = \inf_{\substack{x_\ell \in X_\ell \\ \|x_\ell\|_X=1}} \sup_{y_\ell \in Y_\ell} a(x_\ell, y_\ell) \leq M \quad (\text{LBB})$$

$$\forall y_\ell \in Y_\ell \setminus \{0\} \quad \exists x_\ell \in X_\ell : a_\ell(x_\ell, y_\ell) \neq 0 \quad (\text{ND})$$

Satz 5.3.

1. Das diskrete Problem (P_ℓ) ist genau dann für jede rechte Seite lösbar, wenn in (LBB) $\alpha_\ell > 0$ und (ND) gilt. Dann sind diskrete Lösungen eindeutig.
2. Sofern zusätzlich $x \in X$ mit $F = a(x, \cdot) \in Y^*$ ist, folgt für die diskrete Lösung x_ℓ in X_ℓ die quasioptimale a priori Fehlerabschätzung:

$$\text{dist}_{\|\cdot\|_X}(x, X_\ell) \leq \|x - x_\ell\|_X \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_\ell}\right) \underbrace{\inf_{z_\ell \in X_\ell} \|x - z_\ell\|_X}_{=\text{dist}_{\|\cdot\|_X}(x, X_\ell)}$$

Beweis:

1. Analysis von Satz 5.1 auf $X = X_\ell$ und $Y = Y_\ell$ anwenden.
2. $a(x - x_\ell, \cdot)|_{Y_\ell} = 0$, denn für $y_\ell \in Y_\ell$ folgt

$$a(x - x_\ell, y_\ell) = a(x, y_\ell) - a(x_\ell, y_\ell) = F(y_\ell) - F_\ell(y_\ell) = 0$$

Galerkin-Eigenschaft konformer Diskretisierungen: Für $0 < \varepsilon < \alpha_\ell$ und $z_\ell \in X_\ell \setminus \{x_\ell\}$ existiert mit (LBB) ein $y_\ell \in Y_\ell$ mit $\|y_\ell\|_Y = 1$ und $(\alpha_\ell - \varepsilon) \leq a_\ell\left(\frac{x_\ell - z_\ell}{\|x_\ell - z_\ell\|_X}, y_\ell\right)$. Mit $a(x - x_\ell, y_\ell) = 0$ folgt daraus

$$(\alpha_\ell - \varepsilon)\|x_\ell - z_\ell\|_X \leq a_\ell(x_\ell - z_\ell, y_\ell) = a(x - z_\ell, y_\ell) \leq M\|x - z_\ell\|_X \underbrace{\|y_\ell\|_Y}_{=1}$$

Da ε beliebig klein sein kann, folgt die Stabilität

$$\|x_\ell - z_\ell\|_X \leq \frac{M}{\alpha_\ell} \|x - z_\ell\|_X$$

Bemerkung

Wenn $\alpha_\ell \geq \underline{\alpha} > 0$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und eine Folge $(X_\ell \times Y_\ell)_{l \in \mathbb{N}_0}$, mit $X_\ell \subseteq X_{\ell+1}$ von endlich dimensionalen Unterräumen von $X \times Y$, dann $\|x - x_\ell\|_X \approx \text{dist}(x, X_\ell)$ und man sagt $(x_\ell) \rightarrow x$ quasioptimal. Mit der Dreiecks-Ungleichung folgt

$$\|x_\ell - z_\ell\|_X \leq \|x - z_\ell\|_X + \|x_\ell - z_\ell\|_X \leq \left(1 + \frac{M}{\alpha_\ell}\right) \|x - z_\ell\|_X$$

Kapitel 6

Sattelpunktprobleme und gemischte Formulierungen

Wir betrachten

- X und Y \mathbb{R} -Banachräume
- $F \in X^*, G \in Y^*$
- $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, stetig, symmetrisch und positiv semidefinit (d.h. $a(x, x) \geq 0$ für alle $x \in X$)
- $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und stetig
- $J : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}a(x, x) - F(x)$ (Energiefunktional)
- $K = \{v \in X \mid b(v, \cdot) = G\}$ abgeschlossener Unterraum von X (Nebenbedingungen)
- $\mathcal{L} : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ quadratisch, definiert vermöge $\mathcal{L}(x, y) = J(x) + b(x, y) - G(y)$ (Lagrange-Funktional)

Satz 6.1. $((S) \Leftrightarrow (G) \Rightarrow (M))$ Für $(u, v) \in X \times Y$ sind (S) und (G) äquivalent und implizieren (M) :

$(S) \forall x \in X \forall y \in Y : \mathcal{L}(u, y) \leq \mathcal{L}(u, v) \leq \mathcal{L}(x, v)$ (d.h. (u, v) ist ein Sattelpunkt)

(Links ist keine echte Ungleichung möglich, da auch $y = v$ sein kann und damit $\mathcal{L}(u, y) = \mathcal{L}(u, v)$ gilt.)

$(G) a(u, \cdot) + b(\cdot, v) = F$ und $b(u, \cdot) = G$

$(M) J(u) = \min_{x \in K} J(x)$

Beweis:

1. $(S) \Rightarrow (G)$

Für $t \in \mathbb{R}, y \in Y$ ist $\mathcal{L}(u, v + ty) \leq \mathcal{L}(u, v)$.

$\Leftrightarrow b(u, v + ty) - G(u, v + ty) \leq b(u, v) - G(v)$

$\Leftrightarrow tb(u, v) \leq tG(y)$

Mit $t = \pm 1$ folgt $b(u, y) = G(y)$. Also $u \in K$, d.h. (G_2) (die zweite Gleichung von (G)) ist erfüllt.

Für $x \in X, t \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{L}(u, v) \leq \mathcal{L}(u + tx, v)$.

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) + b(u, v) - G(v) \\
 &\quad \leq \frac{1}{2}a(u, u) + ta(x, u) + \frac{t^2}{2}a(x, x) - F(u + tx) + b(u + tx, v) - G(v) \\
 &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^2}{2} \underbrace{a(x, x)}_{\geq 0} + t(a(x, u) + b(x, v) - F(x))
 \end{aligned}$$

Da t beliebig folgt $0 \leq \operatorname{sgn}(t)(a(x, u) + b(x, v) - F(x))$. $\operatorname{sgn}(t) = \pm 1$ zeigt (G_1) .

2. $(S) \stackrel{(G)}{\Rightarrow} (M)$

Für alle $x \in K$ ist $J(u) = \mathcal{L}(u, v) \leq \mathcal{L}(x, v) = J(x)$ also ist u Minimalstelle von $J|_K$.

3. $(G) \Rightarrow (S)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(u, y) &= J(u) + \underbrace{b(u, y) - G(y)}_{=0 \text{ nach } (G_2)} = J(u) + \underbrace{b(u, v) - G(v)}_{=0} \\
 &= \mathcal{L}(u, v) = \frac{1}{2} \underbrace{a(u, u)}_{=a(x, x)+a(u-x, u+x)} - F(u) + b(u, v) - G(v) \\
 &= J(x) + \underbrace{F(x - u) + b(u, v) + a(u, u - x)}_{=0 \text{ nach } (G_1)} - \frac{1}{2}a(u - x, u - x) - G(v) \\
 &= \mathcal{L}(x, v) - \underbrace{\frac{1}{2}a(u - x, u - x)}_{\leq 0} \leq \mathcal{L}(x, v)
 \end{aligned}$$

□

Zusatz

Wenn a symmetrisch positiv definit (SPD) ist, so hat J höchstens eine Minimalstelle auf konvexen und abgeschlossenen Mengen, denn für $u, z \in K, u \neq z$ gilt $\frac{J(u)+J(z)}{2} > J(\frac{u+z}{2})$.

Satz 6.2. (Hauptsatz für gemischte Probleme) *Es seien:*

- X und Y reflexive \mathbb{R} -Banachräume
- $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und stetig. (a muss weder symmetrisch noch nicht negativ sein.)
- $V = \ker B_1 = \{x \in X | b(x, \cdot) = 0 \text{ in } Y\}$
- $L : X \times Y \rightarrow X^* \times Y^*, L(x, y)(u, v) = (a(x, u) + b(u, y), b(x, v))$
- $0 \leq \alpha = \inf_{\|x\|_X=1} \sup_{\|y\|_Y=1} a(x, y) \leq \|a\|$
- $0 \leq \beta = \inf_{\|y\|_Y=1} \sup_{\|x\|_X=1} a(x, y) \leq \|b\|$

L ist genau dann ein Isomorphismus, wenn $\alpha, \beta > 0$ und $\forall y \in V : a(\cdot, y)|_V \neq 0$. $\|L^{-1}\|$ hängt von $\|a\|, \frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$ ab.

Beweis:

1. Vorbemerkungen

- (a) X und Y sind reflexiv, also ist wegen $(X \times Y)^* \approx X^* \times Y^*$ auch $X \times Y$ reflexiv und es gilt

$$(L(X, Y))(u, v) = (a(x, u) + b(u, y), b(x, v)) \approx a(x, y) + b(u, y) + b(x, v)$$

- (b) Infima und Suprema in α, β sind Minima bzw. Maxima (mit dem Satz von Banach-Alaoglu (Beschränkte Folgen haben in reflexiven Räumen schwach konvergente Teilfolgen (bzw. schwache Häufungspunkte)) und der schwachen Unterhalbstetigkeit der Normen).

2. „ \Rightarrow “

Sei $B : X/V \rightarrow Y^*$ definiert durch $x + V \mapsto b(x, \cdot)$. Damit ist B injektiv, linear und stetig.

Norm in X/V : $\|x + V\|_{X/V} = \text{dist}_{\|\cdot\|_X}(x, V)$. Weil L ein Isomorphismus ist, ist B surjektiv, d.h. B ist ein Isomorphismus zwischen reflexiven Banachräumen.

Aus Satz 5.1 in FEM folgt $\beta > 0$.

Sei $A_0 : V \rightarrow V^*$, definiert durch $u \mapsto a(u, \cdot)|_V$.

Zum Beweis der Surjektivität von A_0 sei $f \in V^*$. Mit dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach existiert $F \in X^*$ mit $f = F|_V$. Da L isomorph existiert genau ein $(x, y) \in X \times Y$ mit $L(x, y) = (F, 0)$.

$$\Rightarrow x \in V \text{ und } a(x, \cdot) + b(\cdot, y) = F, \text{ bzw. } a(x, \cdot)|_V + \underbrace{b(\cdot, y)|_V}_{=0} = F|_V$$

$$\Rightarrow A_0 x = a(x, \cdot) = f$$

Zum Beweis der Injektivität von A_0 sei $x \in V$ und $A_0 x = 0$. Damit gilt $a(x, \cdot) \in X^*$.

$$\Rightarrow a(x, \cdot) \in (X/V)^*$$

Mit B ist auch $B^* : Y \rightarrow (X/V)^*$ isomorph.

Also existiert genau ein $y \in Y$ mit $-a(x, \cdot) = b(\cdot, y)$.

Folglich $L(x, y) = 0$ und so $(x, y) = 0$. Satz 5.1 in FEM zeigt $\alpha > 0$ und dass A_0 nicht entartet ist.

3. „ \Leftarrow “

Für $x \in X$ folgt aus $b(x, \cdot) = 0$:

$$x \in V, \text{ d.h. } x + V = V = 0 \in X/V,$$

$$\text{also } \forall x + V \in (X/V) \setminus \{V\} \exists y \in Y : b(x, y) \neq 0.$$

Da zusätzlich $\beta > 0$ folgt $B : X/V \rightarrow Y^*, x + V \mapsto b(x, \cdot)$ ist linear, stetig und isomorph nach dem Satz 5.1. Zur inf-sup-Abschätzung von L sei $(x, y) \in X \times Y$ mit $\|x\|_X + \|y\|_Y = 1$ und $x_1 \in V$.

$$\Rightarrow \|x - x_1\|_X = \text{dist}(x, V), x_2 = x - x_1$$

Mit $\alpha > 0$ folgt die Existenz von $u_1 \in V \setminus \{0\}$ mit $\alpha \|x_1\|_X \|u_1\|_X \leq a(x_1, u_1)$.

Mit $\beta > 0$ folgt die Existenz von $u_2 \in X \setminus \{0\}$ mit $\beta \|y\|_Y \|u_2 + V\|_{X/V} \leq b(u_2, y)$.

Weiterhin existiert $w \in Y \setminus \{0\}$ mit $\beta\|w\|_Y\|x_2 + V\|_{X/V} \leq b(x_2, w)$.

Weil u_1, u_2 und w jeweils von 0 verschieden sind, können ihre Längen beliebig variiert werden. Seien

$$\begin{aligned} t &= \|x_2\|_X = \text{dist}_{\|\cdot\|_X}(x, V) \\ s &= \|x_1\|_X \\ r &= \|x\|_X = 1 - \|y\|_Y \end{aligned}$$

Demnach gilt $0 \leq r, s, t, r \leq 1$ und $r \leq s + t$.

Nun skaliert man $\|u_1\|_Y = \beta t$, $\|u_1\|_X = \max\{0, \alpha s - t\|a\|\}$ und berechnet für $u = u_1 + u_2$:

$$\begin{aligned} (L(x, y))(u, w) &\equiv (a(x_1 + x_2, u_1 + u_2) + b(u_1 + u_2, y), b(x_1 + x_2, w)) \\ &= (a(x_1 + x_2, u_1 + u_2) + b(u_2, y), b(x_2, w)) \\ &\geq \alpha\|x_1\|_X\|u_1\|_X - \|a\|\|x_2\| \underbrace{\|u\|_X}_{\leq \|u_1\| + \|u_2\|} - \|a\|\|x_1\|\|u_2\| + \beta\|y\|_Y\|u_2\|_X \\ &\quad + \beta\|w\|_Y\|x_2\|_X \\ &\geq \max\{0, \alpha s - t\|a\|\}(\alpha s - \|a\|t) \\ &\quad + \max\{0, \beta(1 - r) - (t + s)\|a\|\}(-\|a\|(t + s) + (1 - r)\beta) + (\beta t)^2 \\ &= (\alpha s - \|a\|t)_+^2 + (\beta(1 - r) - \|a\|(t + s))_+^2 + (\beta t)^2, \quad (\cdot)_+^2 := \max\{0, \cdot\}^2 \\ &\geq \min\{f(r, s, t) | r, s, t \geq 0, r \leq s + t, r \leq 1\} = \underline{f} \geq 0 \end{aligned}$$

Es gilt $\underline{f} > 0$, denn $f(r, s, t) = 0$ impliziert $t = 0, s = 0$ und $1 = r \leq s + t = 0$, was einen Widerspruch darstellt. Das Minimum existiert, wird auf der kompakten Menge

$$\left\{ (r, s, t) \mid 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq \frac{\beta + \|a\|}{\alpha}, 0 \leq r \leq 1 \right\}$$

angenommen und so hängt $\beta^2 \geq \underline{f}$ nur von α, β und $\|a\|$ ab. Aus

$$\|u\|_X + \|w\|_Y \leq \|w\|_Y + \|u_1\|_X + \|u_2\|_X = (\beta t) + (\alpha s + \|a\|t)_+ + (\beta(1 - r) - \|a\|(s + t))_+$$

folgt

$$\begin{aligned} (L(x, y))(u, w) &\gtrsim \underbrace{(\beta t + (\alpha s + \|a\|t)_+ + (\beta(1 - r)\|a\|(s + t))_+)}_{\geq \|u\|_X + \|w\|_Y} \underline{f}^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (\|u\|_X + \|w\|_Y) \underline{f}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Beweis der Nichtentartung von L :

Sei $(u, v) \in X \times Y$ mit $(L(x, y))(u, v) = 0$ für alle $(x, y) \in X \times Y$.

Also: $b(\cdot, v) = 0$ und $\beta > 0$ zeigt $0 = \|b(\cdot, v)\|_{X^*} \geq \beta \|v\|_X$, d.h. $v = 0$.

Weiter folgt $a(x, u) + b(u, y) = 0$ für alle x, y , d.h. $a(\cdot, u) = b(u, \cdot) = 0$.

$\Rightarrow u \in \ker B_1 = v$

Da a nicht entartet auf V ist, folgt $a(u, \cdot)|_V \neq 0 \Rightarrow u = 0$, also insgesamt $u = 0 = v$. \square

Kapitel 7

Beispiele

Satz 7.1. (Helmholtz-Zerlegung)

$$L^2(\Omega)^2 = \nabla H_0^1(\Omega) \oplus \text{Curl } H^1(\Omega)/\mathbb{R}$$

Für ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet Ω gilt:

$$\forall f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) : \exists! a \in H_0^1(\Omega) : \exists! b \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} : f = \nabla a + \text{Curl } b$$

(z.B. b durch $\int_{\Omega} b(x) dx = 0$ eindeutig)

$$\begin{aligned}\nabla a &= \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}, \frac{\partial a}{\partial x_2} \right) \\ \text{Curl } b &= \left(\frac{\partial b}{\partial x_2}, -\frac{\partial b}{\partial x_1} \right) \perp \nabla b \\ \text{div } g &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}, g \in H^1(\Omega) \\ \text{curl } g &= \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, g \in H^1(\Omega)\end{aligned}$$

Für alle $a \in H_0^1(\Omega)$ und $b \in H^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_{\Omega} \nabla a \cdot \text{Curl } b dx = 0$$

d.h.

$$\nabla H_0^1(\Omega) \perp_{L^2} \text{Curl } H^1(\Omega)$$

Beweisideen

1. $\text{div } f \in H^{-1}(\Omega)$ im Sinne von

$$-\int_{\Omega} f D \cdot dx : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto -\int_{\Omega} f(x) Dv(x) dx$$

Da $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ Isomorphismus existiert ein eindeutiges $a \in H_0^1(\Omega)$ mit $\Delta a = \text{div } f$ im Sinne von

$$\int_{\Omega} Da \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} f \nabla v \, dx$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$.

2. Also ist $g = f - \Delta a = f - \nabla a$ divergenzfrei im Sinne von $g \perp_{L^2(\Omega)} \nabla H_0^1(\Omega)$.

Eine glatte Funktion g mit $\operatorname{div} g = 0$ ist von der Form $\operatorname{Curl} b$ für ein b in Analogie zu „ $\operatorname{curl}(g_2, -g_1) = 0$ impliziert die Existenz eines b mit $(g_2, -g_1) = \nabla b$ “.

Klassischer Potentialsatz: rotationsfreie Vektorfelder haben ein Potential.

Gegeben Ω und einen Ausgangspunkt A , definieren wir b eindeutig als Wegintegral

$$\int_{\gamma} G(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}(s) \, ds = \int_{\partial \omega} G(x) \cdot \tau(x) \, ds_x$$

Sei τ der Tangentenvektor an γ und ν orthogonal zu τ .

TODO

Bild

$\Rightarrow \tau = (\tau_1, \tau_2)$ und $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, mit $\tau_1 = -\nu_2$ und $\tau_2 = \nu_1$, d.h. $\nu \perp \tau$.

Wegen

$$G(x) \cdot \tau(x) = (g_2, -g_1) \cdot (-\nu_2, \nu_1) = -\nabla g \cdot \gamma = -\frac{\partial g}{\partial \gamma}$$

folgt

$$\int_{\gamma} G(x) \, ds_x = - \int_{\partial \omega} \frac{\partial g}{\partial \nu} \, ds = - \int_{\omega} \operatorname{div} g \, dx = 0$$

Also ist die Definition von b eindeutig in einfach zusammenhängenden Gebieten.

In der Potentialtheorie zeigt man, dass dieses auch für schwach differenzierbare Funktionen möglich ist und $g = \nabla b$ für genau ein $b \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ existiert.

3. Für $a \in H_0^1(\Omega)$ (eigentlich sogar: $a \in \mathcal{D}(\Omega)$, d.h. Testfunktion), $b \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla a \cdot \operatorname{Curl} b \, dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_2} - \frac{\partial a}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial b}{\partial x_1} \right) \, dx \\ &= \int_{\partial \Omega} b \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} \nu_2 - \frac{\partial a}{\partial x_2} \nu_1 \right) \, ds - \int_{\Omega} b \underbrace{\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_2 \partial x_1} \right)}_{= 0 \text{ (Satz von Schwarz)}} \, dx \\ &= \int_{\partial \Omega} b \frac{\partial a}{\partial s} \, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $\operatorname{Curl} b \perp \nabla \mathcal{D}(\Omega)$. Für $a \in H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$ existiert $a_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|a - a_j\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Omega} \operatorname{Curl} b \nabla a_j \, dx \rightarrow \int \operatorname{Curl} b \nabla a \, dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{Curl} b \nabla a$$

□

Satz 7.2. (div) Sei Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet im \mathbb{R}^n .

1. $\operatorname{div} : H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist linear, stetig und surjektiv.

2. Bei Nullranddaten:

$$\operatorname{div}(H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)) = L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v(x) dx = 0 \right\} = L^2(\Omega)/\mathbb{R}$$

und

$$\operatorname{div}|_{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)} : H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow L_0^2(\Omega)$$

ist linear, stetig und surjektiv. Weiterhin gilt

$$\exists c(\Omega) > 0 : \forall v \in L_0^2(\Omega) \exists q \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

mit $\operatorname{div} q = v$ und $\|q\|_{H^1(\Omega)} \leq c(\Omega) \|v\|_{L^2(\Omega)}$

3. $\operatorname{div}^* = -\nabla : L_0^2(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist linear, stetig und injektiv, mit abgeschlossenem Bild

$$\exists c(\Omega) > 0 : \forall v \in L_0^2(\Omega) : \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla v\|_{H^{-1}(\Omega)}$$

4. $\ker \operatorname{div} = \{\operatorname{Curl} \varphi \mid \varphi \in H^2(\Omega)\} \cap H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Bemerkung: Für $n \neq 2$ wird ein anderer Curl verwendet. Wir verwenden glatten Rand $\partial\Omega$ oder konvexes Ω .

5. Es gilt:

$$b : L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n) - \mathbb{R}, (v, q) \mapsto \int_{\Omega} v(x) \operatorname{div} q(x) dx$$

ist bilinear und stetig. Die inf-sup-Bedingung entfällt.

Beweisideen:

1. Für alle $f \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\exists! u \in H_0^1(\Omega) : f = \Delta u, f = \operatorname{div} p$$

Sofern Ω konvex ist oder einen C^2 -Rand hat, dann ist das Poisson-Problem H^2 -regulär und es gilt $p \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

2. Für $q \in H_0 \subseteq H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt $\int_{\Omega} \operatorname{div} q dx = \int_{\partial\Omega} q \gamma ds = 0$, d.h. $\operatorname{div} q \in L_0^2(\Omega)$.

Zu $w \in L_0^2(\Omega)$ sei $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ eine Lösung von $f = \Delta u$.

$g := \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \nabla u|_{\partial\Omega} \cdot \gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (Spuren von Funktionen in $H^1(\Omega)$, hier: $\partial\Omega$ glatt)

Zu g existiert $G \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ mit $g = \frac{\partial G}{\partial s}$.

Eindeutigkeit in einfach zusammenhängenden Gebieten, denn

$$\int_{\partial\Omega} g(x) ds = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=q \cdot \nu} ds \stackrel{\text{Gaußscher Int'satz}}{=} \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} \nabla u}_{=\Delta u} dx = \int_{\Omega} f dx = 0$$

Zu Cauchy-Daten $(G, 0) \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ existiert $\psi \in H^2(\Omega) : \psi|_{\partial\Omega} = G$ und $\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0$ (nach Fortsetzungssätzen für Sobolev-Funktionen).

Daumenregel (Sobolev-Glattheiten): $\|\cdot\|_{\partial\Omega} : H^s(\Omega) \rightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ist (für $s > \frac{1}{2}$) stetig und besitzt eine stetige Inverse. Hier:

$$\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \lesssim H(G, 0) \Big|_{H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \lesssim \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \lesssim \|u\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(d)}$$

Mit $q = \nabla u - \text{Curl } \psi \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt auf $\partial\Omega$:

$$q \cdot \nu = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=g} - \underbrace{\text{Curl } \psi \cdot \nu}_{=\nabla \psi \cdot \tau = \frac{\partial \psi}{\partial s} = g} = 0$$

und

$$q \cdot \tau = \frac{\partial u}{\partial s} - \underbrace{\text{Curl } \psi \cdot \tau}_{=\pm \nabla \psi \nu} = 0$$

$$\Rightarrow q \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$$

$$\text{Weiter ist } \text{div } q = \Delta u - \underbrace{\text{div Curl } \psi}_{=0} = f.$$

\Rightarrow div ist surjektiv und es gilt die Normabschätzung (Necas-Lemma). \square

Vorlesung am 24.11.2008

Vorabbemerkung

Evans, S.292, Aufgabe 17

$f \in W^{1,p}(\Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \leq p \leq \infty$

$\Rightarrow |f| \in W^{1,p}(\Omega)$ und $Df = 0$ auf $\{f = 0\} = \{x \in \Omega | f(x) = 0\}$ bzw.:

$$\{f^* = 0\} = \{x \in \Omega | f^*(x) = 0\} \text{ mit } f^*(x) = \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B(x,\delta) \cap \Omega} f(y) dy & , \text{ falls existent} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$D|f| = \text{sign}(f) Df$$

7.1 Stokes-Gleichungen

Das Geschwindigkeitsfeld $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und Druck $p \in L_0^2(\Omega)$ zäher Fluide wird modelliert vermöge $\Delta u + \nabla p = -f$ (Kräftegleichgewicht, auch: $\text{div}(Du + pI) = -f, I$ Einheitsmatrix) und $\text{div } u = 0$ (Inkompressibilität) für Volumenkraft f in Ω .

Schwache Form ist ein gemischtes Problem (P)

$$\forall u, v \in X = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), q \in Y = L_0^2(\Omega) :$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} Du : Dv dx,$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \text{div } v dx,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v dx, G(q) = 0$$

Da a X -elliptisch und b die inf-sup-Bedingung erfüllt, hat (P) genau eine Lösung $(u, p) \in X \times Y$.
 Diskretisierung: Zunächst zwei instabile Ansätze:

P_1 - P_0 -FEM für Stokes ($n = 2$ und polygonal berandetes Ω) : \mathcal{T}_ℓ reguläre Triangulierung von Ω in Dreiecke (z.B. $\bigcup \mathcal{T}_\ell = \overline{\Omega}$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_\ell, T_1 \neq T_2 : T_1 \cap T_2 \in \{\emptyset\} \cup \mathcal{N}_i \cup \mathcal{E}_i$).

$$\begin{aligned} P_k(T) &= \{v \in C^\infty(T) : v|_T \text{ ist Polynom von totalen Grad } \leq k\} \\ P_k(\mathcal{T}_\ell) &= \{v \in L^\infty(\Omega) | \forall T \in \mathcal{T}_\ell : v|_T \in P_k(T)\} \\ X_\ell &= P_1(\mathcal{T}_\ell)^2 \cap X = \{v_\ell \in C(\Omega, \mathbb{R}^2) | v_\ell|_{\partial\Omega} = 0 \wedge \forall T \in \mathcal{T}_\ell, v_\ell|_T \text{ affine Funktion auf } T\} \\ Y_\ell &= P_0(\mathcal{T}_\ell) \cap Y \end{aligned}$$

Wenn $|\mathcal{T}_\ell| \geq 2$, dann ist inf-sup-Bedingung nicht erfüllt, d.h. $\beta_\ell = 0$.

Beweis:

Euler-Formel:

$$|\mathcal{T}_\ell| = \underbrace{2|\mathcal{K}_\ell|}_{=\dim Y_k+1} + \underbrace{|\mathcal{N}_\ell \setminus \Omega|}_{\geq 4} - 2, \mathcal{K}_\ell = \mathcal{N}_\ell \cap \Omega$$

$\Rightarrow \dim Y_\ell > \dim X_\ell$

Dann hat die Koeffizientenmatrix $B_\ell \in \mathbb{R}^{\dim X_\ell \times \dim Y_\ell}$ zur diskreten Bilinearform $B|_{X_\ell \times Y_\ell}$ einen Rang $\leq \dim X_\ell < \dim Y_\ell$, d.h. B_ℓ hat nicht maximalen Spaltenrang, d.h. $\exists q_\ell \in Y_\ell \setminus \{0\} : \|q_\ell\|_{L^2} = 1, b(\cdot, q_\ell)_{X_\ell} = 0$.

$\Rightarrow \beta_\ell \leq \|b(\cdot, q_\ell)\|_{X_\ell^*} = 0$ □

Q_1 - P_0 -FEM für Stokes ($n = 2$ und polygonal berandetes Ω , Vereinigung von Quadraten)

- \mathcal{T}_ℓ reguläre Triangulierung von Ω in achsenparallele Rechtecke
- $Q_k(T) = \{\text{Polynome vom partiellen Grad } \leq k \text{ aufgefasst als Funktionen auf } T\}$
- $Q_k(\mathcal{T}_\ell) = \{v \in L^\infty(\Omega) | \forall T \in \mathcal{T}_\ell : v|_T \in Q_k(T)\}$
 (z.B. $v(x, y) = a + bx + cy + dxy$ gehört zu $Q_1(T) \setminus P_1(T)$ für $d \neq 0$. (Btw.: $Q_0 = P_0$)
 Basisfunktionen auf Referenzquadrat $]0, 1[^2$: $xy, (1-x), x(1-y), (1-x)(1-y)$.)
- $X_\ell = P_1(\mathcal{T}_\ell)^2 \cap X$
- $Y_\ell = P_0(\mathcal{T}_\ell) \cap Y$

führt auf Schachbrett-Instabilität für uniformes Gitter auf $\Omega =]0, 1[^2$ mit Schrittweite $h = \frac{1}{N}$, $N = 4, 6, 8, 10, \dots$ obwohl $\dim X_\ell = 2(N-1)^2 > N^2 - 1 = \dim Y_\ell$.

Wir definieren für jede Zelle der Diskretisierung ein Vorzeichen (± 1 , in Form eines Schachbrettmusters), d.h. z.B. $p_\ell = (-1)^{j+k} \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$ auf $] \frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} [\times] \frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} [$ für $j, k = 1, \dots, N$.

Dann ist $b(\cdot, p_\ell)|_{X_\ell} = 0$ und damit gilt für die inf-sup-Konstante $\beta_\ell = 0$.

Beweis:

Für jede Basisfunktion φ_1 in (h, h) in erster Komponente gilt

TODO
beweis

TODO
bild
47

□

Satz 7.3. (Fortin-Kriterium) Seien

- $X_\ell \times Y_\ell$ abgeschlossene Unterräume von reflexiven \mathbb{R} -Banachräumen $X \times Y$
- $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Linearformen
- a X -elliptisch
- b erfüllt inf-sup-Bedingung mit Konstante $\beta > 0$

Dann sind äquivalent:

1. inf-sup-Bedingung für $b|_{X_\ell \times Y_\ell}$ mit $\beta_\ell > 0$
2. Existenz eines (Fortin-)Operators $\Pi_\ell : X \rightarrow X_\ell$ linear und stetig mit $Y_\ell \subseteq \ker b(x - \Pi_\ell x, \cdot)$ für alle $x \in X$.

Vorlesung am 26.11.2008

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{B_1} & Y^* \\ \Pi_\ell \downarrow & & \downarrow \\ X_\ell & \xrightarrow{B_{1,\ell}} & Y_\ell^* \end{array}$$

$$b(x, \cdot)|_{Y_\ell} = b(\Pi_\ell x, \cdot)|_{Y_\ell}$$

Beweis:

„ \Leftarrow “

Für $y_\ell \in Y_\ell$ gilt

$$\begin{aligned} \beta \|y_\ell\|_Y \leq \|b(\cdot, y_\ell)\|_{X^*} &= \sup_{x \in X, \|x\|_X=1} \underbrace{b(x, y_\ell)}_{=b(\Pi_\ell x, y_\ell)} \\ &= \sup_{x \in X, \Pi_\ell x \neq 0} \frac{b(\Pi_\ell x, y_\ell)}{\|\Pi_\ell x\|_X} \left| \cdot \frac{\|\Pi_\ell x\|_X}{\|x\|_X} \right. \\ &\leq \|\Pi_\ell\| \sup_{x_\ell \in \Pi_\ell(X), \|x_\ell\|_X=1} b(x_\ell, y_\ell) = \|\Pi_\ell\| \cdot \|b(\cdot, y_\ell)\|_{\Pi_\ell(X)^*} \\ &\leq \|\Pi_\ell\| \|b(\cdot, Y_\ell)\|_{X_\ell^*} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{inf-sup mit } \beta_\ell \geq \frac{\beta}{\|\Pi_\ell\|} > 0$$

„ \Rightarrow “

Für $x \in X : \exists (x_\ell, y_\ell) \in X_\ell \times Y_\ell$:

$$\begin{aligned} a(x_\ell, \cdot)|_{X_\ell} + b(\cdot, y_\ell)|_{X_\ell} &= a(x, \cdot)|_{X_\ell} \in X_\ell^* \\ b(x_\ell, \cdot)|_{Y_\ell} &= b(x, \cdot)|_{Y_\ell} \in Y_\ell^* \end{aligned}$$

Dann erfüllt $\Pi_\ell x = x_\ell$ alle Bedingungen, insbesondere

$$\|\Pi_\ell x\|_X \leq C \left(\|a\|, \|b\|, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \right) \|x\|$$

7.1.1 MINI-Element

- \mathcal{T}_ℓ : reguläre Triangulierung in Dreiecke
- P_1 -FE-Raum $S_1(\mathcal{T}) = P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap H_0^1(\Omega)$

Für $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit den nodalen Basisfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zu den drei Ecken P_1, P_2, P_3 von T sei $b_T = 27\varphi_1\varphi_2\varphi_3 \in H_0^1(T)$ („cubic bubble function“). Es gilt:

$$0 \leq b_T \leq 1, \nabla b_T = 27(\varphi_1\varphi_2\nabla\varphi_3 + \varphi_1\varphi_3\nabla\varphi_2 + \varphi_2\varphi_3\nabla\varphi_1)$$

$|\nabla\varphi_j| = \varrho_j^{-1}$, ϱ_j ist die Höhe zum Punkt P_j

T ist nicht degeneriert, d.h. $0 < \underline{\alpha} \leq \angle(T) \leq \bar{\alpha} < \pi$ für universale Konstanten $0 < \underline{\alpha} \leq \bar{\alpha} < \pi$

$\varrho_j \approx h_T = \text{diam}(T)$

Also $\|\nabla b_T\|_{L^\infty(T)} \approx h_T^{-1}$.

$$\begin{aligned} B_3(\mathcal{T}_\ell) &= \text{span}\{b_T \in H_0^1(\Omega) | T \in \mathcal{T}_\ell\} \\ X_\ell &= (S_1(\mathcal{T}_\ell) \oplus B_3(\mathcal{T}_\ell))^2 \subseteq H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ Y_\ell &= S_1(\mathcal{T}_\ell) \cap L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

Satz 7.4. MINI erfüllt inf-sup für Stokes (für Ω konvex, \mathcal{T}_ℓ quasiuniform).

Beweis:

Konstruktion von $\Pi_\ell : \underbrace{H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)}_{=: X} \rightarrow X_\ell$ für das Fortin-Kriterium in drei Etappen:

1. Galerkin-Projektion $G_\ell : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_1(\mathcal{T}_\ell)$, d.h. für $u \in H_0^1(\Omega)$ ist $G_\ell u \in S_1(\mathcal{T}_\ell)$ der diskrete Riesz-Repräsentant zu

$$(Du, D\cdot)_{L^1(\Omega)}|_{S_1(\mathcal{T}_\ell)} \stackrel{!}{=} (DG_\ell u, D\cdot)_{S_1(\mathcal{T}_\ell)}$$

Dann gilt

$$\|\nabla G_\ell u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

und

$$\|u - G_\ell u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 b_{max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Aubin-Nitsche Dualitätsargument: $e = u - G_\ell u$ als rechte Seite in der Laplace-Gleichung:

$\exists! z \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ mit $-\Delta z = e$ in Ω mit $\|z\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|e\|_{L^2(\Omega)}$.

(denn Laplace-Gleichung ist H^2 -regulär auf konvexem Ω)

Es folgt

$$\|e\|_{L^2(\Omega)}^2 = - \int_\Omega e \Delta z dx = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla z dx = \int_\Omega \nabla e \cdot \nabla(z - z_\ell) dx$$

für $z_\ell = I_\ell z \in S_1(\mathcal{T}_\ell)$, denn

$$\int \nabla e \cdot \nabla z_\ell dx = \int \nabla u \cdot \nabla z_\ell dx - \int \nabla G_\ell u \cdot \nabla z_\ell dx = 0$$

per Definition von $G_\ell u$ mit modalem Interpolanten $I_\ell z$ und

$$\begin{aligned} \|\nabla(z - I_\ell z)\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim h_{max} \|D^2 z\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla(z - z_\ell)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \|D^2 z\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim h_{max} \|e\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla e\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

2. $P_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}_3(\mathcal{T}_\ell)$ definiert vermöge $\int_T (v - P_\ell v) dx = 0$ für $v \in L^2(\Omega)$ und $T \in \mathcal{T}_\ell$, d.h.

$$P_\ell v|_T = \left(\frac{\int_T v(x) dx}{\int_T b_T dx} \right) b_T$$

Dann gilt

$$\|\nabla P_\ell v\|_{L^2(\Omega)} \leq 5! \left\| \frac{U}{\varrho_\ell} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

mit ϱ_ℓ als kleinsten Innenkreisradius in $\mathcal{T}_\ell \approx h_{max}$, denn:

$$\begin{aligned} \|\nabla P_\ell v\|_{L^2(T)} &\leq \frac{\|v\|_{L^1(T)}}{\|b_T\|_{L^1(T)}} \underbrace{\|\nabla b_T\|_{L^2(T)}}_{\leq \frac{3}{2}(\text{kleinste Höhe})} \\ &\lesssim \|v\|_{L^2(T)} \frac{|T|^{\frac{1}{2}} h_{max}}{|T|} |T|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3. $\Pi_\ell := (\tilde{P}_\ell, \tilde{P}_\ell) : X \rightarrow X_\ell$ für

$$\tilde{\Pi}_\ell := G_\ell + P_\ell(\text{id} - G_\ell) \cdot H_0^1(\Omega) \rightarrow S^1(\mathcal{T}_\ell) \oplus B_3(\mathcal{T}_\ell)$$

Dann

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Pi}_\ell v\|_{H^1(\Omega)} &\leq \underbrace{\|G_\ell - I v\|_{H^1(\Omega)}}_{\lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)}} + \underbrace{\|P_\ell(\text{id} - G_\ell)\|_{H^1(\Omega)}}_{\lesssim h_{max}^{-1} \|v - G_\ell v\|_{L^2(\Omega)}} \\ &\lesssim h_{max} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

und $w \in X, q_\ell \in Y_\ell$

$$\begin{aligned} b(w - \Pi_\ell w, q_\ell) &= \int_\Omega \underbrace{q_\ell}_{\in H^1(\Omega)/\mathbb{R}} \operatorname{div} \underbrace{(w - \Pi_\ell w)}_{\in H_0^1(\Omega)^2} dx \\ &= - \int_\Omega (w_\ell - \Pi_\ell w) Dq_\ell dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} - \underbrace{Dq_\ell|_T}_{\text{konst auf } T} \cdot \underbrace{\int_T (w_j - G_\ell w_j - P_\ell(w_j - G_\ell w_j))_{j=1,2} dx}_{=(0,0) \text{ per def in (2.)}} \end{aligned}$$

7.2 Taylor-Hood-FE für Stokes

$$X_\ell = P_2(\mathcal{T}_\ell)^2 \cap X$$

$$Y_\ell = S_1(\mathcal{T}_\ell) \cap L_0^2(\Omega)$$

erfüllt diskrete inf-sup-Bedingung. Dies ist aufwendiger als MINI-FE, hat aber eine bessere Druck-Approximation.

Vorlesung am 01.12.2008

7.3 FE-Räume in $H(\text{div})$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann ist $X = H(\text{div}, \Omega) = \{q \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \text{div} q \in L^2(\Omega)\}$, wobei $\text{div} q \in L^2(\Omega)$ meint, dass ein $w \in L^2(\Omega)$ existiert mit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \int_{\Omega} q D\varphi \, dx = - \int_{\Omega} \underbrace{\text{div} q}_{:=w} \varphi \, dx$$

Bemerkungen

1. Warnung: $q \in H(\text{div}, \Omega)$ meint *nicht*, dass $\frac{\partial q_j}{\partial x_k}$ als L^2 -Funktion existiert für ein $j, k = 1, \dots, n$.
2. $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \subset H(\text{div}, \Omega)$, insbesondere ist $\text{div} q$ die klassische Divergenz, falls q glatt ist.
- 3.

$$\langle p, q \rangle_{H(\text{div}, \Omega)} := \langle p, q \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} + \langle \text{div} p, \text{div} q \rangle_{L^2(\Omega)}$$

ist Skalarprodukt auf dem Hilbert-Raum

$$H(\text{div}, \Omega) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n}^{\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Omega)}}, \quad \|q\|_{H(\text{div}, \Omega)} = \sqrt{\|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div} q\|_{L^2(\Omega)}^2}$$

4. $H_0(\text{div}, \Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)^n}^{\|\cdot\|_{H(\text{div}, \Omega)}}$
5. $\text{div} : H(\text{div}, \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ist linear, stetig und surjektiv.
6. Für $p \in H(\text{div}, \Omega)$ und

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{\gamma v := v|_{\partial\Omega} \mid v \in H^1(\Omega)\}$$

ist

$$\gamma_\nu p := p \cdot \nu \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^*$$

mit Norm

$$\|w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{v \in H^1(\Omega), w=v|_{\partial\Omega}} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\underbrace{(\gamma_\nu p)}_{\in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \underbrace{(v|_{\partial\Omega})}_{\in H^1(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} v(p \cdot \nu) \, ds := \int_{\Omega} (p \cdot Dv + v \text{div} p) \, dx, \quad \text{für } v \in H^1(\Omega)$$

Warnung: Für $p \in L^1(T)$, T Dreieck mit Kante(nstück) E existiert $\int_E p v_E \, ds$ i.a. nicht. (Ex. z.B. für $p \in H^1(T)$ und $p \in H(\text{div}, T) \cap L^r(T, \mathbb{R}^n)$ für r groß.)

[Denn v mit $v|_E \equiv 1$ und $v|_{\partial T \setminus E} \equiv 0$ existiert nicht in $H^1(T)$ für $n = 1, 2$.]

7. $H_0(\text{div}, \Omega) = \ker \gamma_\nu = \{q \in H(\text{div}, \Omega) | q \cdot \nu = 0\}$
8. $H = \{q \in H_0(\text{div}, \Omega) | \text{div} q = 0\}$ und $H^\perp = \nabla H^1(\Omega)$ erfüllen $L^2(\Omega)^n = H \oplus H^\perp$.
9. Analog definiert man

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{q \in L^2(\Omega^n) | \text{curl} q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)\} \text{ für } (n, m) \in \{(2, 1), (3, 3)\}$$

Lemma 7.1. Sei \mathcal{T} eine Partition von Ω in endlich viele Lipschitz-Gebiete in dem Sinne von $\overline{T_1} \cap \overline{T_2} = \partial T_1 \cap \partial T_2$ für $T_1, T_2 \in \mathcal{T}, T_1 \neq T_2$ und $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \overline{\Omega}$ (z.B. \mathcal{T} Triangulierung) und

$$q \in H^1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^n) = \{q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) | q|_T \in H^1(T, \mathbb{R}^n) \text{ für alle } T \in \mathcal{T}\}$$

(„broken H^1 -Fkns“, „gebrochene Sobolev-Räume“)

Dann gilt $q \in H(\text{div}, \Omega) \Leftrightarrow [q \cdot \nu] = 0$ für fast alle Punkte auf $\partial \mathcal{T} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \partial T$. Dabei ist für $T_1 \cap T_2 \in \mathcal{E}$ der Sprung durch $[p]_{T_1 \cap T_2} = p|_{\partial T_2} - p|_{\partial T_1}$ gegeben.

(Beweis als Übungsaufgabe)

Definition (RT_k)

Für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T} von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (polygonal berandet) in lauter Dreiecke bezeichne

$$RT_k(T) = \left\{ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} p_1(x, y) \\ p_2(x, y) \end{pmatrix} + p_3(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid p_1, p_2, p_3 \in P_k(T) \right\} \subset P_{k+1}(T)^2$$

für $k \in \mathbb{N}_0, T \in \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned} RT_k(\mathcal{T}) &:= \{q \in H(\text{div}, \Omega) | \forall T \in \mathcal{T} : p|_T \in RT_k(T)\} \\ &= \{q \in L^2(\Omega)^2 | \forall T \in \mathcal{T}, p|_T \in RT_k(T) \wedge \forall E \in \mathcal{E}_{\text{Innenkante}} : [p]_{E\nu E} = 0\} \end{aligned}$$

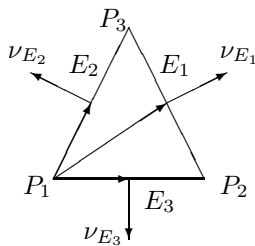
\rightsquigarrow Raviart-Thomas-Raum k -ten Grades mit $Y_\ell = P_k(\mathcal{T}_\ell) \subseteq Y = L^2(\Omega)$.

Beispiel

Sei $k = 0$.

$T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$ (Dreieck), $p|_T(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\Psi_1(x, y) = \frac{1}{\varrho_1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_1 \right)$ für Höhe ϱ_1 von P_1 auf E_1 , d.h. $|E_1|_{\varrho_1} = 2|T|$.



$$\Psi_1 \cdot \nu|_{E_j} = \begin{cases} 0 & \text{entlang } E_j \text{ für } j = 2, 3 \\ \frac{1}{\varrho_1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P_1 \right) \nu_{E_1} = \frac{\varrho_1}{\varrho_1} = 1 & \text{entlang } E_1 \end{cases}$$

Die Basisfunktionen in $RT_0(\mathcal{T}_\ell)$ sind stückweise $\pm \Psi_i$ und global den Kanten zugeordnet: $\forall E \in \mathcal{E}_\ell$

Bemerkung: $[p]_{\nu E} = p|_{T_+} \nu_{T_+} + p|_{T_-} \nu_{T_-}$, $\nu_E = \nu_{T_+}|_E$ ($\Rightarrow \nu_E = -\nu_{T_-}|_E$)

Satz 7.5.

$$b : \underbrace{H(\text{div}, \Omega)}_{=X} \times \underbrace{L^2(\Omega)}_{=Y} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, v) \mapsto \int_{\Omega} v \text{div} p \, dx$$

erfüllt inf-sup-Bedingung auf $X_{\ell} \times Y_{\ell} = RT_0(\mathcal{T}_{\ell}) \times P_0(\mathcal{T})$.

Beweis:

mit Fortin-Kriterium

Globale inf-sup-Bedingung folgt mit den obigen Aussagen über $\text{div} H^1(\Omega)^n \rightarrow L^2(\Omega)$.

Naiver Ansatz für Operator $\Pi : X \rightarrow X_{\ell}$ wäre:

$$(\Pi q \nu_E|_E = \text{konst} = \int_E q \nu_E \, ds$$

denn dann wäre

$$\int_E ((\Pi_{\ell} p) - p) \nu_E \, ds = 0$$

also

$$b(\Pi_{\ell} p - p, V_{\ell}) = \mathcal{E}_{T \in \mathcal{T}_{\ell}} \int_{\partial T} (\Pi_{\ell} p - p) \nu \, ds$$

und $\int_{\partial T} (\Pi_{\ell} p - p) \, ds = 0$.

Dieser Ansatz ist unmöglich für allgemeines $p \in H(\text{div}, \Omega)$, gilt aber für H^1 -Funktionen.

Vorlesung am 03.12.2008

Satz 7.6. (Verallgemeinertes Fortin-Kriterium) *Es seien:*

- X und Y reflexive \mathbb{R} -Banachräume
- $X_{\ell} \times Y_{\ell} \subseteq X \times Y$
- W \mathbb{R} -Banachraum mit $W \hookrightarrow X$
- S \mathbb{R} -Banachraum mit $S \cap Y_{\ell} \subseteq Y$ und $|\cdot|_S$ Halbnorm auf S
- $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform
- $\Pi_{\ell} : W \rightarrow X$ stetig und linear
- $\Pi_{\ell}(W) \subseteq X_{\ell}$
- $\forall w \in W, s_{\ell} \in S \cap Y_{\ell} : b(w - \Pi_{\ell} w, s_{\ell}) = 0$
- $\inf_{\substack{s_{\ell} \in S \cap Y_{\ell} \\ |s_{\ell}|=1}} \sup_{\substack{w \in W \\ \|w\|_W=1}} b(w, s_{\ell}) = \alpha \geq 0$

Dann gilt

$$\inf_{\substack{s_{\ell} \in S \cap Y_{\ell} \\ |s_{\ell}|_S=1}} \sup_{\substack{x_{\ell} \in X_{\ell} \\ \|x_{\ell}\|_X=1}} b(x_{\ell}, s_{\ell}) \geq \frac{\alpha}{\|\Pi_{\ell}\|_{L(W; X)}}$$

Beweis:

Für $s_\ell \in S \cap Y_\ell$ mit $|s_\ell|_S = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\|b(\cdot, s_\ell)\|_{X_\ell^*} &\geq \|b(\cdot, s_\ell)\|_{(\Pi_\ell(W))^*} = \sup_{\substack{w \in W \\ \Pi_\ell w \neq 0}} \frac{b(\Pi_\ell w, s_\ell)}{\|\Pi_\ell w\|_X} \\
&\geq \frac{\| \Pi_\ell w \|_X \leq \| \Pi_\ell \| \cdot \| w \|_W}{\geq} \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{b(\Pi_\ell w, s_\ell)}{\| \Pi_\ell \| \| w \|_W} \\
&\stackrel{b(w - \Pi_\ell w, \cdot)|_{S \cap Y_\ell} = 0}{\geq} \frac{1}{\| \Pi_\ell \|} \sup_{w \in W \setminus \{0\}} \frac{b(w, s_\ell)}{\| w \|_W} \\
&= \| \Pi_\ell \|^{-1} \| b(\cdot, s_\ell) \|_{X_\ell^*} \geq \| \Pi_\ell \|^{-1} \alpha
\end{aligned}$$

□

Zurück zum Beweis von Satz 7.5:

Mit diesem verallgemeinerten Fortin-Kriterium folgt die LBB-Bedingung mit Faktor $C \| \Pi_\ell \|^{-1}$, denn mit Nečas-Lemma ist $\alpha > 0$ unabhängig von l . Es bleibt für $w \in W = H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ die Norm von Π_ℓ zu berechnen.

$(\Pi_\ell w) \nu_E = \int_E w \nu ds = \text{konstant}$ entlang $E \in \mathcal{E}_\ell$. Mit Spuransatz ist

$$|(\Pi_\ell w) \nu_E| \leq |E|^{-1} \|w\|_{L^1(E)} \leq |E|^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(E)} \lesssim \|w\|_{L^2(T)} h_T^{-1} + |w|_{H^1(T)}, E \subseteq T \in \mathcal{T}_\ell$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\| \text{div} \underbrace{\Pi_\ell w}_{\substack{\in RT_0(T) \\ \in P_0(T)}} \|_{L^2(T)}}_{\substack{\int_{\partial T} (\Pi_\ell w) \nu ds \\ | \int_T \text{div} \Pi_\ell w \, dx |}} &= \frac{\int_{\partial T} (\Pi_\ell w) \nu ds}{|T|^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell(T)} \underbrace{\int_E (\Pi_\ell w) \nu_E ds}_{= \int_E w \nu ds} = \int_{\partial T} w \nu ds \\
&= \int_T \text{div} w \, dx \leq \| \text{div} w \|_{L^1(T)} \leq |T|^{\frac{1}{2}} \| \text{div} w \|_{L^2(T)}
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_T \| \text{div}(\Pi_\ell w) \|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_T \| \text{div} w \|_{L^2(T)}^2$$

Damit folgt

$$\| \text{div} \Pi_\ell w \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \text{div} w \|_{L^2(\Omega)}$$

Auf T ist

$$\Pi_\ell w|_T = \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell(T)} \left(\int_E w \nu ds \right) \underbrace{\Psi_E}_{RT_0\text{-Basis-Funktion}}$$

mit $\Psi_E(x) = \frac{(x-P_E)}{\varrho_E}$ für $x \in T = \text{conv}(E \cup \{P_E\})$. Also

$$\Psi_E \|_{L^2(T)} \lesssim \frac{h_T}{\varrho_E} |T|^{\frac{1}{2}} \approx |T|^{\frac{1}{2}}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \|\Pi_\ell w\|_{L^2(T)} &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell(T)} |T|^{\frac{1}{2}} (h_T^{-1} \|w\|_{L^2(T)} + |w|_{H^1(T)}) \lesssim \|w\|_{H^1(T)} \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_3 \\ \|\Pi_\ell w\|_{L^2(T)} &\lesssim \|w\|_{H^1(T)} \end{aligned}$$

Eigentlich gilt sogar

$$\|\Pi_\ell w\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|h_\ell \nabla w\|_{L^2(\Omega)}$$

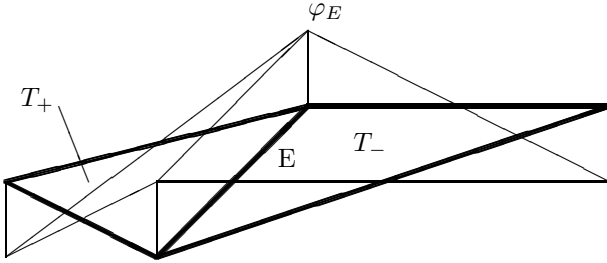
Crouzeix-Raviart-FEM

$$CR_k(\mathcal{T}_\ell) = \{v_\ell \in P_k(\mathcal{T}_\ell)\}$$

$\forall E \in \{\mathcal{E}_\ell \text{ Innenkante} \mid \int_E [v_\ell] ds = 0\}$, wobei entlang $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ für $T_\pm \in \mathcal{T}_\ell, T_+ \neq T_-$ gilt $[v_\ell] := (v_\ell|_{T_+})|_E - (v_\ell|_{T_-})|_E$.

Äquivalent $CR_1(\mathcal{T}_\ell) = P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap C(\{mid(E)\} \mid E \in \mathcal{E}_\ell)$, $mid(E)$ als Mittelpunkt von E .

Die Kantenbasisfunktion φ_E einer Kante E ist 1 auf der Kante und -1 auf den gegenüberliegenden Ecken:



- φ_E ist definiert für jede Kante $E \in \mathcal{E}_\ell$.
- $\varphi_E \in C(\omega_E) \cap P_1(\mathcal{T}_\ell)$
- $\text{supp} \varphi_E = \bar{\omega}_E = T_+ \cup T_-$
- $CR_1(\mathcal{T}_\ell) = \text{span}\{\varphi_E \mid E \in \mathcal{E}_\ell\}$

Satz 7.7. (Marini (1974)) Zu $f \in L^2(\Omega)$ und reguläre Triangulierung \mathcal{T}_ℓ seien:

- $f_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$ stückweises Integralmittel von f
- $u_{CR} \in V_{CR} := \{v_\ell \in CR_1(\mathcal{T}_\ell) \mid \forall E \in \mathcal{E}_\ell, E \subseteq \partial\Omega, V_\ell(mid(E)) = 0\}$
erfülle $\int_\Omega \nabla_\ell u_{CR} \nabla_\ell v_\ell dx = \int_\Omega f_\ell v_\ell dx$ für alle $v_\ell \in V_{CR}$.
- $p_{CR} := \nabla_\ell u_{CR} \in P_0(\mathcal{T}_\ell)^2$ stückweiser Gradient ∇_ℓ von u_{CR}

Dann folgt, dass die Raviart-Thomas-FE-Lösung $u_{RT} \in RT_0(\mathcal{T}_\ell) \subseteq H(\text{div}, \Omega)$ mit $f_\ell + \text{div} p_{RT} = 0$ auf $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit Schwerpunkt $mid(T)$

$$p_{RT}(x) = p_{CR}(x) - \frac{1}{2}(x - mid(T))f_\ell \text{ für } x \in T \in \mathcal{T}_\ell$$

erfüllt.

Lax notiert: $p_{RT} = p_{CR} - \frac{1}{2}(\cdot - mid(\mathcal{T}_\ell))$

Beweis:

φ_E sei Kantenbasisfunktion von E in V_{CR} .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_E [p_{CR}] \cdot \nu_E \varphi_E ds &= \int_E [\varphi_E p_{CR}] \nu_E ds = \int_{\cup \mathcal{E}_\ell} [\varphi_E p_{CR}] \nu_{\mathcal{E}_\ell} ds \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \underbrace{\int_{\partial T} (\varphi_E p_{CR}) \nu_T ds}_{= \int_T \text{div}(\varphi_E p_{CR}) dx = \int_T \nabla_\ell \varphi_E \cdot p_{CR}} \\ &= \int_\Omega p_{CR} \cdot \nabla_\ell \varphi_E dx = \int_\Omega f_\ell \varphi_E dx \end{aligned}$$

Vorlesung am 08.12.2008

Für $E \in \mathcal{E}_\ell$, $T \in \mathcal{T}_\ell$, $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_E [p_{CR}] \nu_E \varphi_E ds &= \int_{\partial T_+} (p_{CR} \varphi_E) \nu_{T_+} ds + \int_{\partial T_-} (p_{CR} \varphi_E) \nu_{T_-} ds \\ &= \int_\Omega \underbrace{\text{div}_\ell(\varphi_E p_{CR})}_{p_{CR} D_\ell \varphi_E + \varphi_E \underbrace{\text{div}_\ell p_{CR}}_{=0}} dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow p_\ell = p_{CR} - \frac{1}{2}(\cdot - \text{mid}(\mathcal{T}_\ell)) f_\ell$ erfüllt

$$\begin{aligned} \int_E [p_\ell] \nu_E ds &= [p_\ell] \nu_E |E| = \int_E \varphi_E [p_\ell \nu_E] ds \\ &= \int_\Omega f_\ell \varphi_e dx - \frac{1}{2} \int_{\partial T_+} (x - \text{mid}(T_+)) \nu_{T_+} \varphi_E f_\ell dx - \frac{1}{2} \int_{\partial T_-} (x - \text{mid}(T_-)) \nu_{T_-} \varphi_E f_\ell dx \\ &= \int_\Omega f_\ell \varphi_e dx - \frac{1}{2} \underbrace{\int_{W_E} f_\ell (x - \text{mid}(\mathcal{T}_\ell)) D_\ell \varphi_E f_\ell dx}_{=0} - \int_{W_E} f_\ell \varphi_E dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow p_\ell \in H(\text{div}, \Omega)$

$\Rightarrow p_\ell \in RT_0(\mathcal{T}_\ell)$, $\text{div} p_\ell = \text{div}_\ell p_\ell = -f_\ell$

Es bleibt die Existenz eines $\bar{u}_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$ mit $\int_\Omega p_\ell q_\ell dx = -\int_\Omega \bar{u}_\ell \text{div} q_\ell dx$ für alle $q_\ell \in RT_0(\Omega)$ zu zeigen (siehe (P)).

Die Bedingung ist äquivalent zu $q_\ell = r_\ell + s_\ell(x - \text{mid}(\mathcal{T}_\ell)) \in RT_0(\mathcal{T}_\ell)$ für $r_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^2)$ und $s_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$ mit $\text{div} q_\ell = \text{div}_\ell q_\ell = s_\ell$ und

$$0 = \int_\Omega p_\ell r_\ell - \int_\Omega u_\ell s_\ell dx + \int_\Omega \frac{s_\ell}{2} (x - \text{mid}(\mathcal{T}_\ell)) p_\ell dx$$

7.3.1 Zusatzvorlesung statt Übung

Raviart-Thomas-FEM (7.3 - FE-Räume in $H(\text{div}, \Omega)$):

Gegeben: reguläre Triangulierung \mathcal{T} von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\forall T \in \mathcal{T} : RT_0(T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{aligned} RT_0(\mathcal{T}) &= \{q \in H(\text{div}, \Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T} : P|_T \in RT_0(T)\} \\ &= \{q : \Omega \rightarrow \Omega \mid \exists \text{const}_{\mathcal{T}} : \Omega \rightarrow \Omega, \forall T \in \mathcal{T} : \underbrace{\#\text{const}_{\mathcal{T}}(T)}_{\text{Mächtigkeit}} = 1\} \end{aligned}$$

und

$$q \in \left\{ \text{const}_{\ell} + \frac{1}{2}(\cdot - \text{mid}_{\mathcal{T}}) \cdot \text{div}_{\ell} q \right\}$$

d.h.

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega : q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{const}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \text{mid}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \cdot \text{div}_{\ell} q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Crouzeix-Raviart-FEM

Basisfunktionen: Φ_E^{CR}

Beweisergänzung

$P_{\mathcal{T}} = P_{\ell}$ aus dem Beweis

1. Schritt:

$$P_{\mathcal{T}} \in H(\text{div}, \Omega)$$

$$P_{\mathcal{T}} \in RT_0(\mathcal{T}), \text{div} P_{\mathcal{T}} = \text{div}_{\mathcal{T}} P_{\mathcal{T}} = -f_{\mathcal{T}}$$

mit $f_{\mathcal{T}} = f_{\ell}$ aus dem Beweis.

2. Es blieb zu zeigen, dass

$$\exists \bar{u}_{\mathcal{T}} \in P_0(\mathcal{T}) : \forall q \in RT_0(\mathcal{T}) : - \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}} \text{div} q \, dx = \int_{\Omega} P_{\mathcal{T}} q \, dx$$

Wir definieren $F_{\mathcal{T}} : RT_0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $q \mapsto \int_{\Omega} P_{\mathcal{T}} q_{\mathcal{T}} \, dx$. Diese Funktion ist linear und stetig.

$$Z_{\ell} := \{q \in RT_0(\mathcal{T}) \mid \text{div} q = 0\} = \{q \in RT_0(\mathcal{T}) \mid \forall T \in \mathcal{T} : \#q(T) = 1\} = P_0(\mathcal{T})^2$$

- Mächtigkeit

Wir zeigen:

(a) $Z_{\ell} \subseteq \ker F_{\mathcal{T}}$

(b) $\exists \bar{u}_{\mathcal{T}} : \dots$

(a) Es sei $q \in Z_\ell = P_0(\mathcal{T})^2$.

$$\Rightarrow F_{\mathcal{T}}(q) = \int_{\Omega} P_{\mathcal{T}} \cdot q \, dx = \int_{\Omega} q D_{\mathcal{T}} u_{CR} \, dx - \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underbrace{q(x - \text{mid}_{\mathcal{T}}(x))}_{\int_{\Omega} (x - |\mathcal{T}) = 0} \underbrace{f_{\mathcal{T}}}_{\text{konst. auf jedem Dreieck}} \, dx}_{=0}$$

In jedem $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\int_T q D_{\mathcal{T}} u_{CR} \, dx = \int_{\cup E(T)} q u_{CR} \cdot \nu_E \, ds - \underbrace{\int_T u_{CR} \cdot \text{div} q \, dx}_{=0}$$

Wegen $u_{CR} \in H(\text{div}, \Omega)$ folgt $F_{\mathcal{T}}(q) = 0$.

(b) Definieren $b : RT_0(\mathcal{T}) \times P_0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(q, v) \mapsto \int_{\Omega} v \text{div} q \, dx$.

$B_1 : RT_0(\mathcal{T}) \rightarrow P_0(\mathcal{T})^*$, definiert durch $q \mapsto b(q, \cdot)$, erfüllt inf-sup-Bedingung, d.h. B_1 ist surjektiv.

$B := B_1|_{Z_\ell^\perp} : Z_\ell^\perp \rightarrow P_0(\mathcal{T}_0)^*$ ist bijektiv.

B^* sei die zu B duale Abbildung, d.h. $B^* : P_0(\mathcal{T}) = P_0(\mathcal{T})^{**} \rightarrow (Z_\ell^\perp)^*$ und für alle $u \in P_0(\mathcal{T}), q \in Z_\ell^\perp$ ist $B^*(u)(q) = B(q)(u) = b(q, u)$. B^* ist ebenfalls bijektiv.

$F_{\mathcal{T}}|_{Z_\ell^\perp} \in (Z_\ell^\perp)^*$, definiere $\bar{u}_{\mathcal{T}} = (B^*)^{-1}(F_{\mathcal{T}}|_{Z_\ell^\perp})$.

Damit ist für alle $q \in Z_\ell^\perp$:

$$F_\ell(q) = B^*(\bar{u}_{\mathcal{T}})(q) = b(q, \bar{u}_{\mathcal{T}}) = \int_{\Omega} \bar{u}_{\mathcal{T}} \cdot \text{div} q \, dx$$

Für $q \in Z_\ell$ ist $F_\ell(q) = 0 = \int_{\Omega} \bar{u}_{\mathcal{T}} \cdot \text{div} q \, dx$ wegen $Z_\ell \subseteq \ker F_\ell$. D.h. für alle $q \in RT_0(\mathcal{T})$: $F_\ell(q) = \int_{\Omega} \bar{u}_{\mathcal{T}} \cdot \text{div} q \, dx$, da wir q durch $q = q_{Z_\ell} + q_{Z_\ell^\perp}$ mit $q_{Z_\ell} \in Z_\ell$ und $q_{Z_\ell^\perp} \in Z_\ell^\perp$ zerlegen können.

7.3.2 Elastizitätsgleichungen mit Navier-Lamé-Gleichungen

- $u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n})$
- $f + \text{div} \sigma = 0$
- $\sigma = \mathbb{C} \varepsilon(u)$
- $\varepsilon(u) = \text{sym} Du = \frac{1}{2}(Du + (Du)^T)$
- $E \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$
- μ, λ : Lamé-Parameter
- $\mathbb{C}E = \lambda + \text{tr} E \cdot 1_{n \times n} + 2\mu E$

Schwache Form und P_1 -FEM mit $V_\ell = P_1(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^m) \cap V \subseteq V$, Energienorm:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}}(\varepsilon(u - u_\ell))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma_\ell)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_\ell) : \mathbb{C}^{-1}(\sigma - \sigma_\ell) \, dx, \sigma_\ell = \mathbb{C}_\ell \varepsilon(u_\ell) \end{aligned}$$

Die Norm hängt von λ ab und Fehleranalyse zeigt

$$\|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}}(\sigma - \sigma_\ell)\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\lambda) \cdot \|h_\ell\|_{L^\infty(\Omega)}^\alpha$$

Der Exponent $\alpha > 0$ hängt von Ω ab, aber $C(\lambda)$ auch von $\lambda \rightarrow \infty$ und von der Querkontraktionszahl $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$ für fast inkompressibles Material.

(Locking-Effekt: Für ν nahe $\frac{1}{2}$ ist der Fehler auch für sehr feine Gitter noch sehr groß. Damit sind P_1 -FEM für große λ praktisch unbrauchbar.)

Satz 7.8. Der Operator $\mathcal{A} : L \times V \rightarrow (L \times V)^*$, definiert für

$$(\sigma, u), (\tau, v) \in L \times V = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}) \mid \int_{\Omega} \text{tr} \varphi(x) dx = 0 \right\} \times H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

durch

$$(\mathcal{A}(\sigma, u))(\tau, v) = \int_{\Omega} \tau : (\mathbb{C}^{-1}\sigma - \varepsilon(u)) dx - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) dx$$

zur isotropen homogenen linearen Elastizitätstheorie ist stetig, linear und bijektiv mit Operatornormen $\|\mathcal{A}\|, \|\mathcal{A}^{-1}\|$, die von $\lambda \rightarrow \infty$ unabhängig sind.

Beweisidee:

$$\mathbb{C}^{-1}(\tau) = \frac{1}{2\mu} \tau - \underbrace{\frac{\lambda}{2\mu(n\lambda + 2\mu)}}_{\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2n\mu}} \text{tr}(\tau) \cdot \mathbf{1}_{n \times n}$$

Zum Beweis der λ -Unabhängigkeit von $\|\mathcal{A}^{-1}\|$ genügt es zu zeigen, dass α von λ unabhängig ist. Sei $Z = \ker B_1 = \{\tau \in L \mid \text{div} \tau = 0\}$. Aufgabe 7.1 zeigt für

$$\tau \in L \cap H(\text{div}, \Omega, \mathbb{R}^{n \times n}), \quad \|\tau\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\text{div} \tau\|_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\|\text{div} \tau\|_{L^2(\Omega)}}_{=0 \text{ für } \tau \in Z}$$

$$\text{div} \tau(x) \leq \sqrt{2\mu} |\text{dev} \mathbb{C}^{-\frac{1}{2}} \tau(x)| \lesssim \|\mathbb{C}^{-\frac{1}{2}} \tau(x)\|$$

Also

$$\|\tau\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\text{dev} \tau\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\mathbb{C}^{\frac{1}{2}} \tau\|_{L^2(\Omega)}$$

d.h. die Bilinearform a mit $a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma : \mathbb{C}^{-1} \tau dx$ ist Z -elliptisch mit Konstante $\alpha \approx 1$ unabhängig von $\lambda \rightarrow \infty$.

7.3.3 MFEM

Arnold-Winter-MFEM in $H(\text{div}, \Omega, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}) \times L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Für $n = 2$:

Auf Dreieck T mit $\sigma_\ell|_T \in \{\tau_\ell \in P_r(T, \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}) \mid \text{div} \tau \in P_1(T, \mathbb{R}^n)\}$ und $u_\ell|_T \in P_1(T; \mathbb{R}^n)$ und einer 30×30 STEMA.

7.3.4 PEERS

=Plane Elasticity Element (with) Reduced Symmetrie

- $\tau \in H(\text{div}, \mathbb{R}^{n \times n})$ (i.a. unsymmetrisch)
- $a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} \sigma : \mathbb{C}^{-1} \tau dx$
- $\mathbb{R}_{skew}^{n \times n} = \{\tau \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \tau = -\tau^T\}$

- $\gamma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}_{skew}^{n \times n})$
- $b(\tau; v, \gamma) = \int_{\Omega} (\text{div} \tau + \sigma : \gamma) dx$ mit $v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$
- $X_{\ell} = RT_0(\mathcal{T}_{\ell}) \oplus B_3(\mathcal{T}_{\ell})$
- $Y_{\ell} = P_0(\mathcal{T}_{\ell}, \mathbb{R}^n) \times P_1(\mathcal{T}_{\ell}, \mathbb{R}_{skew}^{n \times n})$

Vorlesung am 10.12.2008

Kapitel 8

Vertretungszeit

8.1 Definition eines Finiten Elementes nach Ciarlet

Definition (Finites Element)

Das Tripel $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ heißt *Finites Element* (auch kurz FE), wenn

1. (FE1) $T \subseteq \mathbb{R}^d$ ist ein beschränktes Lipschitz-Gebiet.
2. (FE2) \mathcal{P} ist ein endlich dimensionaler Funktionenraum auf T .
3. (FE3) \mathcal{N} ist eine Basis für den dualen Vektorraum $\mathcal{P}^* = \{F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}, F \text{ linear}\}$.

Bemerkung

1. Später nehmen wir an, dass sich die Funktionale aus \mathcal{N} auf gewisse Sobolev-Räume fortsetzen lassen.
2. $\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{P}^*$
3. Da \mathcal{P} endlich dimensional ist, sind alle $F \in \mathcal{P}^*$ stetig.

Definition (nodale Basis)

Wenn $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ein Finites Element mit $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_m)$ ist, dann heißt $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ *nodale Basis* von $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$, falls

- $\varphi_j \in \mathcal{P}, 1 \leq j \leq m$
- $N_j(\varphi_k) = \delta_{j,k}, 1 \leq j, k \leq m$

erfüllt sind.

Bemerkung

Bei Angabe eines Tripels $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ist oft sofort klar, dass (FE1) und (FE2) erfüllt sind. Um (FE3) zu überprüfen, kann für (N_1, \dots, N_m) und eine Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ von \mathcal{P} die Vandermonde-Matrix $(N_j(\varphi_k))_{j,k=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ auf Regularität untersucht werden. (FE3) ist hinreichend für die Existenz einer nodalen Basis.

Beispiel

1. P_1 -FE

- T ist ein nichtentartetes Dreieck (bzw. Tetraeder)
 $T = \text{conv}(P_1, \dots, P_{d+1})$
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1(T)$, $\dim \mathcal{P}_1(T) = d + 1$
- $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_{d+1})$ mit $N_j(\varphi) = \varphi(P_j)$

$\Rightarrow (T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ist FE.

Die nodale Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_{d+1})$ ist durch

- $\varphi_j \in \mathcal{P}_1(T)$
- $\varphi_j(P_j) = 1$
- $\varphi_j(P_k) = 0$ für $j \neq k$

gegeben. (\rightsquigarrow Hutfunktion)

2. Q_1 -FE

- $T = \text{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ist ein nichtentartetes konvexes Viereck.
- $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_4)$ ist die Punktauswertung in P_1, \dots, P_4 .
- $\mathcal{P} = \text{span}(\eta_1, \dots, \eta_4)$ mit $\eta_j = \varphi_j \circ \Phi^{-1}$, wobei Φ die bilineare Abbildung von $]0, 1[^2$ auf T ist. φ_j sind die Funktionen auf $]0, 1[^2$, welche in einer Ecke 1 und in allen anderen Ecken 0 sind, z.B. $\varphi_1(x_1, x_2) = \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{4}$.

$\Rightarrow (T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ ist FE.

Diese Funktionen bilden auch gleich die nodale Basis.

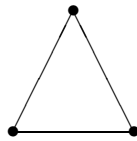
3. P_1^{NC} -FE

- $T = \text{conv}(P_1, P_2, P_3)$ ist ein nichtentartetes Dreieck.
- $\mathcal{P} = P_1(T)$
- $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$, $N_j(\varphi) = \varphi(M_j)$, wobei M_j die Kantenmitten sind.

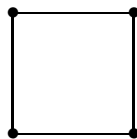
Schematische Darstellung

Skizze des Gebiets T , Punkte für die Stellen der Punktauswertung in \mathcal{N}

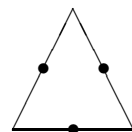
1. P_1 -FE



2. Q_1 -FE



3. P_1^{NC} -FE



8.2 Interpolation

Definition (Interpolant (lokal))

Für ein FE $(T, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ mit nodaler Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ und einer Funktion $v : T \rightarrow \mathbb{R}$, für die $N_j v$ definiert sind, definieren wir den *lokalen Interpolanten* $I_T v$ gemäß

$$I_T v = \sum_{j=1}^m (N_j v) \varphi_j$$

Bemerkung

Es gilt $I_T \varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{P}$.

Definition (Interpolant (global))

Gegeben sei eine Triangulierung \mathcal{T} des beschränkten Lipschitz-Gebietes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Wir setzen weiterhin voraus, dass zu jedem $T \in \mathcal{T}$ sowohl \mathcal{P}_T als auch \mathcal{N}_T so existieren, dass $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ ein FE ist. Wenn für $v \in C^k(\overline{\Omega})$ und jedes $T \in \mathcal{T}$ der lokale Interpotant $I_T v$ existiert, dann heißt $Iv : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(Iv)|_T = I_T v, T \in \mathcal{T}$$

globaler Interpolant von v .

Beispiel

Für P_1, Q_1, P_1^{NC} hatten wir eine nodale Basis $(\eta_z, z \in \mathcal{K})$ bestimmt. In dieser Form definiert $Iv = \sum_{z \in \mathcal{K}} v(z) \eta_z$ für $v \in C(\overline{\Omega})$ den globalen Interpolanten, der *nodaler Interpolant* genannt wird. Später werden wir ihn als \mathcal{I} schreiben.

Bemerkung

Nodale Interpolanten sind nur für stetige Funktionen definiert. Der Definitionsbereich der N_j ist zu beachten.

Beispiel

Es gibt FE, die keine Punktauswertungen benötigen:

- \mathcal{T} sei ein Dreieck
- $\mathcal{P} = P_1(T)$
- $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$

$$\begin{aligned} - N_1(\varphi) &= \frac{1}{|T|} \int_T \varphi \, dx \\ - N_2(\varphi) &= \frac{1}{|T|} \int_T \varphi x_1 \, dx \\ - N_3(\varphi) &= \frac{1}{|T|} \int_T \varphi x_2 \, dx \end{aligned}$$

mit $x = (x_1, x_2)$

Diese Funktionale sind für $\varphi \in L^1(T)$ definiert.

8.3 Diskreter Raum

Definition (Diskreter Raum)

Es sei \mathcal{T} eine Triangulierung. Für jedes $T \in \mathcal{T}$ sei $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ ein FE. Weiterhin sei $k \in \mathbb{N}_0$ kleinstmöglich, sodass Iv für alle $v \in C^k(\bar{\Omega})$ definiert ist.

Dann heißt $S = \text{im}(I) \subseteq L^\infty(\Omega)$ *diskreter Raum* (oder auch *Finite-Elemente-Raum*, bzw. *FE-Raum*) zu Elementierung $((T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T), T \in \mathcal{T})$.

Man sagt, der diskrete Raum S oder der (globale) Interpolant Iv ist C^m -konform, wenn $S \subseteq C^m(\bar{\Omega})$ gilt.

Bemerkung

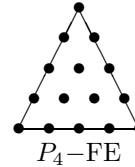
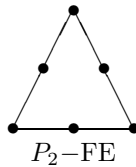
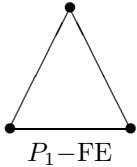
P_1 -FE und Q_1 -FE sind C^0 -konform. P_1^{NC} ist nicht C^0 -konform, da der Interpolant im Allgemeinen unstetig ist.

Da Iv immer stückweise analytisch ist, gilt $S \subseteq H^{m+1}(\Omega) \Leftrightarrow S$ ist C^m -konform.

Für $S \subseteq H^1(\Omega)$ benötigen wir C^0 -konforme Räume.

8.4 Weitere FE

1. Lagrange-Elemente auf Dreiecken



Für P_4 erhalten wir also 15 Punktauswertungen, d.h. $\dim \mathcal{P}_4 = \binom{4+2}{2} = 15$.

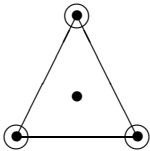
Wir zerlegen dabei jede Kante in gleich große Teilstücke und konstruieren daraus eine Untertriangulierung von T . Die Ecken der Untertriangulierung sind die Punkte zum Auswerten der Funktionale.

An den Kanten erhalten wir jedoch weiterhin nur C^0 -Konformität.

2. Hermite-Elemente auf Dreiecken

Neben Punktauswertungen kommen nun auch die Auswertungen von Ableitungen als Funktional N_j hinzu.

Kubisches Hermite-FE

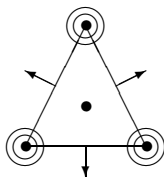


⊙ ist der Funktionswert und die ersten beiden Ableitungen.

Wir erhalten 10 Funktionale und damit die Dimension 10.

$\Rightarrow C^0$ -konform

3. Argyris-Element (C^1 -konform)

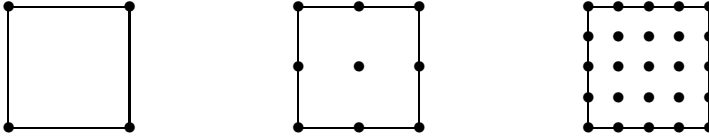


T ist ein Dreieck

Funktionale:

- Funktionswerte in den Ecken (3 Werte)
- 1. Ableitung in den Ecken (6 Werte)
- 2. Ableitungen in den Ecken (9 Werte)
- Normalenableitungen in den Kantenmitten (3 Werte)

4. Tensor-Produkt-Elemente auf Rechtecken (C^0 -konform)



Analog zu den Lagrange-Elementen, nur mit Rechtecken statt Dreiecken

Vorlesung am 15.12.2008

8.5 Bramble-Hilbert-Lemma

Lemma 8.1. (Deny-Lions) Sei $\mathcal{P}_r(T)$ der Raum der Polynome vom Grad $\leq r$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C(T, r)$ sodass

$$\inf_{q \in \mathcal{P}_r(T)} \|v + q\|_{W^{r+1,p}(T)} \leq C(T, r) |v|_{W^{r+1,p}(T)}$$

für alle $v \in W^{r+1,p}(T)$ erfüllt ist.

Beweis:

Seien $n = \dim \mathcal{P}_r(T)$, $T \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex mit $|\alpha| \leq r$. $N_\alpha : W^{r+1,p}(T) \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $v \mapsto \int_T D^\alpha v \, dx$, sind lineare stetige Funktionale.

Für $q \in \mathcal{P}_r(T)$ gilt $N_\alpha(q) = 0$ (für alle α mit $|\alpha| \leq r$) genau dann, wenn $q = 0$.

Wir setzen $\|\cdot\|_{r+1,p} = \|\cdot\|_{W^{r+1,p}(T)}$ bzw. $|\cdot|_{r+1,p} = |\cdot|_{W^{r+1,p}(T)}$ und wollen zeigen, dass

$$(*) \quad \|v\|_{r+1,p} \leq C \left(|v|_{r+1,p} + \sum_{|\alpha| \leq r} |N_\alpha(v)| \right)$$

Annahme:

Diese Ungleichung gilt nicht, d.h. es gibt eine Folge $(v_\ell)_{\ell \geq 1} \subseteq W^{r+1,p}(T)$ mit $\|v_\ell\|_{r+1,p} = 1$ und

$$(**) \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(|v_\ell|_{r+1,p} + \sum_{|\alpha| \leq r} |N_\alpha(v_\ell)| \right) = 0$$

Da $(v_\ell)_{\ell \geq 1}$ in $W^{r+1,p}(T)$ beschränkt ist, gibt es auf Grund der kompakten Einbettung

$$W^{r+1,p}(T) \hookrightarrow W^{r,p}(T)$$

eine Teilfolge $(w_m)_{m \geq 1} \subseteq (v_\ell)_{\ell \geq 1}$, die in $W^{r,p}(T)$ gegen ein Grenzelement $w \in W^{r,p}(T)$ konvergiert. Nach **(**)** gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} |w_m|_{r+1,p} = 0$. Damit ist (w_m) eine Cauchy-Folge in $W^{r+1,p}(T)$. Wegen der Vollständigkeit hat diese Folge das Grenzelement w . Für w gilt $|w|_{r+1,p} = 0$.

$\Rightarrow w \in \mathcal{P}_r(T)$

Andererseits gilt $N_\alpha(w) = 0$ für alle α mit $|\alpha| \leq r$ nach **(**)**.

$\Rightarrow w = 0$

Dies stellt jedoch einen Widerspruch zu $\|w\|_{r+1,p} = 1$ dar. Damit muss (*) gelten.

Zu jedem $v \in W^{r+1,p}(T)$ kann durch geeignete Wahl der Koeffizienten ein Polynom $q \in \mathcal{P}_r(T)$ mit $N_\alpha(q) = -N_\alpha(v)$ gewählt werden. Dann gilt:

$$\inf_{\tilde{q} \in \mathcal{P}_r(T)} \|v + \tilde{q}\|_{r+1,p} \leq \|v + q\|_{r+1,p} \leq C \left(\underbrace{|v + q|}_{=|v|_{r+1,p}} + \sum_{|\alpha| \leq r} \underbrace{|N_\alpha(v + q)|}_{=0 \text{ nach Wahl von } q} \right) = C|v|_{r+1,p}$$

□

Lemma 8.2. (Bramble-Hilbert) Sei F eine lineare Abbildung von $W^{r+1,p}(T)$ in einen Banachraum Y mit Norm $\|\cdot\|_Y$. Es gelte:

1. $\|F(u)\|_Y \leq C_1 \|u\|_{r+1,p}$ für alle $u \in W^{r+1,p}(T)$
(d.h. F ist stetig)
2. $\forall q \in \mathcal{P}_r(T) : F(q) = 0$

Dann gibt es zwei Konstanten C und \tilde{C} mit

$$\forall u \in W^{r+1,p}(T) : \|F(u)\| \leq C \inf_{q \in \mathcal{P}_r(T)} \|u + q\|_{r+1,p} \leq \tilde{C} |u|_{r+1,p}$$

Beweis:

Aus $F(p) = 0$ für $p \in \mathcal{P}_r(T)$ folgt:

$$\|F(u)\|_Y \leq C_1 \inf_{q \in \mathcal{P}_r(F)} \|u + q\|_{r+1,p} \leq \underbrace{C_1 C_2}_{=C} |u|_{r+1,p}$$

□

8.6 Transformationsatz

Satz 8.1. (Trafo-Satz) Eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, definiert vermöge $x \mapsto Bx + y$, $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und $y \in \mathbb{R}^d$ bilde das beschränkte Lipschitz-Gebiet Ω_1 auf das beschränkte Lipschitz-Gebiet Ω_2 ab. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und $u \in H^m(\Omega_2)$:

$$\|D^m(u \circ F)\|_{L^2(\Omega_1)} \leq |\det B|^{-\frac{1}{2}} \cdot \|B\|_F^m \cdot \|D^m u\|_{L^2(\Omega_2)}$$

Dabei bezeichnet $\|B\|_F = \sqrt{\sum_{j,k=1}^d B_{j,k}^2}$ die Frobenius-Norm der Matrix B .

(ohne Beweis)

8.6.1 Bemerkungen

Affin-äquivalente FE

Zwei FE $(T, \mathcal{P}_T, \mathcal{N}_T)$ und $(K, \mathcal{P}_K, \mathcal{N}_K)$ heißen affin-äquivalent, wenn es eine invertierbare affine Abbildung $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $x \mapsto Bx + b$ gibt, sodass:

1. $F(K) = T$
2. $\mathcal{P}_T = \{v : T \rightarrow \mathbb{R} \mid v = w \circ F^{-1}, w \in \mathcal{P}_K\}$
3. $\mathcal{N}_T = \{N : \mathcal{P}_T \rightarrow \mathbb{R} \mid N(v) = \tilde{N}(v \circ F), \tilde{N} \in \mathcal{N}_K\}$

Isoparametrische FE

Wir lassen nicht nur affine Abbildungen, sondern z.B. P_2 -Abbildungen zu.

8.7 Approximationsatz

$$\|\nabla u - \nabla U\|_{L^2(\Omega)} \leq C \min_{V \in \mathcal{S}} \|\nabla u - \nabla V\|_{L^2(\Omega)}$$

Wir wählen nun ein konkretes V , nämlich die nodale Interpolante $\mathcal{I}u = \sum_{z \in K} u(z)\eta(z)$, $u \in C(\bar{\Omega})$. Wir betrachten nun P_1 -FE bzw. Q_1 -FE auf Parallelogrammen.

Sei $h_T = \text{diam}(T) = \max\{\|x - y\|_2 \mid x, y \in T\}$ der Durchmesser von T und $D_T^k f(x_0)$ die elementweise Matrix aller partiellen Ableitungen der Ordnung k im Punkt $x_0 \in T$.

Satz 8.2. (Approximationsatz) *(Gilt für P_1 und Q_1 auf Parallelogrammen, sowie P_1^{NC} .)*

Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Form der Elemente in \mathcal{T} , aber nicht von ihrer Anzahl $|\mathcal{T}|$ oder dem Durchmesser $\text{diam}(T)$ abhängig ist und folgendes erfüllt:

$$\forall u \in H^2(\Omega), k = 0, 1, 2 : \|D^k(u - \mathcal{I}u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^{2(2-k)} \|D^2 u\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis:

Wir beweisen die Abschätzung $\|D^k(u - \mathcal{I}u)\|_{L^2(T)} \leq C h_T^{2-k} \|D^2 u\|_{L^2(T)}$ elementweise für alle $T \in \mathcal{T}$. Die vollständige Aussage wird dann durch Quadrieren und Addition der einzelnen Ungleichungen gezeigt.

Seien:

- $T_{ref} = \text{conv}((0, 0), (0, 1), (1, 0))$
- $\Phi : T_{ref} \rightarrow T$
- $I_{ref}(u \circ \varphi) = (I_T u) \circ \Phi$
- $L = id - I_{ref} : H^2(T_{ref}) \rightarrow H^k(T_{ref}), k = 0, 1, 2$, wobei id die formale Identität zwischen $H^2(T_{ref})$ und $H^k(T_{ref})$ bezeichnet.

Dann gilt $L(q) = 0$ für alle $q \in \mathcal{P}(T_{ref})$. Außerdem ist L ein linearer, stetiger Operator.

Aus Bramble-Hilbert folgt nun

$$\|(id - I_{ref})v\|_{H^k(T_{ref})} \leq C_{ref} \|D^2 v\|_{L^2(T_{ref})}$$

Es folgt eine Anwendung des Transformationssatzes mit $\Omega_1 = T$, $\Omega_2 = T_{ref}$, $F = \Phi^{-1}$ und $\Phi^{-1}(x) = B^{-1}x - B^{-1}y$:

Sei $w = (u - \mathcal{I}u) \circ \Phi$. Dann gilt $w \in H^2(T_{ref})$ und $w = u \circ \Phi - I_{ref}(u \circ \Phi)$.

$\Rightarrow u - \mathcal{I}u = w \circ \Phi^{-1}$

$$\begin{aligned} \|D^k(u - I_T u)\|_{L^2(T)} &= \|D^k(w \circ \Phi^{-1})\|_{L^2(T)} \\ &\leq |\det B^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|_F^k \|D^k w\|_{L^2(T_{ref})} \\ &= |\det B^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|_F^k \underbrace{\|D^k(u \circ \Phi - I_{ref}(u \circ \Phi))\|_{L^2(T_{ref})}}_{=\|u \circ \Phi - I_{ref}(u \circ \Phi)\|_{H^k(T_{ref})}} \\ &\leq |\det B^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|_F^k C_{ref} \|D^2(u \circ \Phi)\|_{L^2(T_{ref})} \end{aligned}$$

Erneute Anwendung des Trafo-Satzes mit $\Omega_1 = T_{ref}$, $\Omega_2 = T$ und $F = \Phi$ liefert:

$$\begin{aligned} \|D^2(u \circ \Phi)\|_{L^2(T_{ref})} &\leq |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|B\|_F^2 \|D^2 u\|_{L^2(T)} \\ \Rightarrow \|D^k(u - I_T u)\|_{L^2(T)} &\leq C_{ref} \underbrace{|\det B^{-1}|^{-\frac{1}{2}} \|B^{-1}\|_F^k |\det B|^{-\frac{1}{2}} \|B\|_F^2}_{=Ch_T^{2-k}} \|D^2 u\|_{L^2(T)} \end{aligned}$$

Mit $\det B^{-1} = \frac{1}{\det B}$, $\|B\|_F \leq \sqrt{2}h_T$, $\|B^{-1}\|_F \leq \frac{\sqrt{2}}{\varrho_T}$, h_T als Kantenlänge und ϱ_T als Höhe über dieser Kante ergibt sich:

$$\|B\|_T^2 \|B^{-1}\|_F^k = 2^{1+\frac{k}{2}} \left(\frac{h_T}{\varrho_T}\right)^k h_T^{2-k} \leq 4 \underbrace{\left(\frac{h_T}{\varrho_T}\right)^k}_{\leq C} h_T^{2-k}$$

□

Vorlesung am 17.12.2008

8.8 Aubin-Nitsche-Technik (Dualität)

Bisher: Abschätzung in der Energienorm (d.h. $|\cdot|_1$)

Jetzt: L^2 -Fehlerabschätzung

- a stetige elliptische Bilinearform auf $H = H_D^1(\Omega)$
- b stetiges lineares Funktional auf H (d.h. $b \in H^*$)

Definition (H^2 -Regularität)

Durch a ist ein H^2 -reguläres Problem gegeben, falls für jede rechte Seite b mit $b(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx$ und $f \in L^2(\Omega)$ die Lösung u in $H_D^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ liegt und der Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von f genügt.

Duales Problem

Finde $w \in H_D^1(\Omega)$ mit $\forall v \in H_D^1(\Omega) : a(v, w) = b(v)$. (D.h. die Lösung steht hier im 2. Argument.)
Seien $S \subseteq H_D^1(\Omega)$ der FE-Raum mit der Galerkin-Lösung U als Approximation an u und $e = u - U$.
Da a elliptisch auf $H_D^1(\Omega)$ ist, gibt es genau ein $w \in H_D^1(\Omega)$ mit

$$\forall v \in H_D^1(\Omega) : a(v, w) = \int_{\Omega} ev dx$$

Aus der H^2 -Regularität folgt $\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C_2 \|e\|_{L^2(\Omega)}$.

Voraussetzung:

$$\min_{W \in S} \|w - W\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 h \|D^2 w\|_{L^2(\Omega)}$$

Satz 8.3. (Aubin-Nitsche-Lemma) *Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$\|u - U\|_{L^2(\Omega)} \leq \|a\| C_2 C_3 h \|u - U\|_{H^1(\Omega)} \leq \|a\| C_2 C_3^2 C_4 h^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$$

(konforme P_1, Q_1 -Elemente)

Beweis:

Galerkin-Orthogonalität

$$\forall W \in S : a(e, W) = \underbrace{a(u, W)}_{=b(W)} - \underbrace{a(U, W)}_{=b(W)} = 0$$

Mit $v = e$ folgt:

$$\forall W \in S : \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} ee \, dx = a(e, w) = a(e, w - W)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \min_{W \in S} a(e, w - W) \\ &\leq \|a\| \cdot \|e\|_{H^1} \min_{W \in S} \|w - W\|_{H^1} \\ &\stackrel{Appr.}{\leq} \|a\| \cdot \|e\|_{H^1} C_3 h \|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{H^2-Reg.}{\leq} \|a\| \cdot \|e\|_{H^1} C_3 h C_2 \|e\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|e\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|a\| C_2 C_3 h \|e\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\|e\|_{H^1} = \|u - U\|_{H^1} \stackrel{Cea}{\leq} C_4 \min_{W \in S} \|u - W\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 C_4 h \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \|e\|_{L^2} \leq \|a\| C_2 C_3^2 C_4 h^2 \|D^2 u\|_{L^2}$$

□

8.9 A priori Fehlerabschätzung für P_1^{NC} -FEM

- $\operatorname{div}(K \nabla u) = f$ in Ω
- $u = 0$ auf Γ_D
- $\nabla u^T K u = g$ auf Γ_N
- $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset, \Gamma_D \cup \Gamma_N = P = \partial\Omega$
- $K \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$ mit positiven und gleichmäßig von 0 weg beschränkten Eigenwerten, Lipschitz-stetig
- $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_N)$

Schwache Formulierung

Finde $u \in H_D^1(\Omega)$ mit

- $\forall v \in H_D^1(\Omega) : a(u, v) = b(v)$
- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u^T K \nabla v \, dx$
- $b(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} g v d\gamma$

S : FE-Raum mit P_1^{NC} -FE, $S \not\subseteq H_D^1(\Omega)$
 $\Rightarrow \|u - U\|_{H^1(\Omega)}$ ist nicht definiert.

\mathcal{T} : Triangulierung von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$$H^k(\mathcal{T}) := \{w \in L^1(\Omega) : w|_T \in H^k(\text{int}T), T \in \mathcal{T}\}, k \in \mathbb{N}_0$$

auf $H^1(\mathcal{T})$ definieren wir

$$a_{\mathcal{T}}(u, v) := \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla u^T K \nabla v \, dx$$

Diskrete Energienorm

$$\|v\|_{a_{\mathcal{T}}} := a_{\mathcal{T}}(v, v)^{\frac{1}{2}}, v \in H^1(\mathcal{T})$$

Diskrete Sobolev-Norm

$$\|v\|_{H^1(\mathcal{T})} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- $\forall v, w \in H^1(\Omega) : a(v, w) = a_{\mathcal{T}}(v, w)$
- $\forall v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{H^1(\Omega)} = \|v\|_{H^1(\mathcal{T})}$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0 : S \subseteq H^k(\mathcal{T})$

Finde $U \in S : \forall V \in S : a_{\mathcal{T}}(U, V) = b(V)$ (diskretes Problem).

Im Allgemeinen gilt: $a_{\mathcal{T}}(u, V) \neq b(V)$ wegen $V \in S \not\subseteq H_D^1(\Omega)$. Daher haben wir in der Regel keine Galerkin-Orthogonalität.

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{T}}(u, V) - b(V) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla u^T K \nabla V \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T fV \, dx - \int_{\Gamma_N} gV \, d\gamma \\ &= \underbrace{- \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (f + \text{div}(K \nabla u))V \, dx}_{=0, \text{ wegen DGL}} + \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{\partial T \cap \Gamma_N} (\nabla u^T K n - g)V \, d\gamma}_{=0, \text{ wegen R-Bdg.}} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{\partial T \cap \Gamma_D} (\nabla u^T K n)V \, d\gamma + \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_{\partial T \cap \Omega} (\nabla u^T K n)V \, d\gamma \end{aligned}$$

Die Terme der vierten Summe treten genau zweimal auf, da es sich um die Kanten zwischen zwei Elementen handelt. Wegen $n_1 = -n_2$ ist das Integral für jede Kante

$$\int_E (\nabla u^T K n_1) \underbrace{(V|_{T_1} - V|_{T_2})}_{=J(V)}$$

Kantensprünge:

$E \in \mathcal{E}$ sei eine Kante von \mathcal{T} .

n_E sei ein fester Normaleneinheitsvektor, der für die Randkanten mit der äußeren Normalen übereinstimmt. Wir definieren nun J :

$$J : H^1(\mathcal{T}) \rightarrow \left\{ \varphi : \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E \rightarrow \mathbb{R} \right\}$$

1. $E \in \mathcal{E}$ ist eine Kante in Ω . Dann existieren T_+ und T_- aus \mathcal{T} mit $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$.

$$J(V)(x) := (V|_{T_+})(x) - (V|_{T_-})(x)$$

2. Randkante E :

$$J(V)(x) = \begin{cases} V(x) & E \subseteq \Gamma_D \\ 0 & E \subseteq \Gamma_N \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{\mathcal{T}}(u, V) - b(V) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E (\nabla u^T K n_E) J(V) d\gamma = a_{\mathcal{T}}(u, V) - a_{\mathcal{T}}(U, V) = a_{\mathcal{T}}(e, V)$$

$$a_{\mathcal{T}}(e, e) = a_{\mathcal{T}}(e, u - V) + \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_E (\nabla u^T K u_E) J(U - V) d\gamma$$

mit $e = u - U$, $V = \mathcal{I}u : a_{\mathcal{T}}(e, u - V) \leq c \|e\|_{H^2(\mathcal{T})} h \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}$

Satz 8.4. *Es gibt eine Konstante $C > 0$, die nur von der Elementform und dem kleinsten Eigenwert von $K(x)$ abhängt, sodass:*

$$\|u - U\|_{H^1(\mathcal{T})} \leq Ch (\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(K \nabla u)\|_{L^2(\Omega)})$$

Beweis:

$$w_E := \bigcup \{T \in \mathcal{T} \mid |E \cap \partial T| > 0\}$$

Es gilt $\int_E J(U) d\gamma = 0$, da $J(U)$ eine lineare Funktion mit Wert 0 im Mittelpunkt von E ist. Sei $\Psi = \nabla u^T K n_E$, $\tau = \frac{1}{|E|} \int_E \Psi d\gamma$.

$$\begin{aligned} \int_E \Psi J(U) d\gamma &= \int_E \Psi J(U) d\gamma + \tau \underbrace{\int_E J(U) d\gamma}_{=0} \\ &= \int_E (\Psi - \tau) J(U - \alpha) d\gamma, \alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ &\leq \|\Psi - \tau\|_{L^2(E)} \|J(U - \alpha)\|_{L^2(E)} \|J(U - \alpha)\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

Einschub (Spurgleichung)

Für $w \in H^1(T)$ und $E \subseteq \partial T$ gilt

$$\|w\|_{L^2(E)} \leq Ch_E^{-\frac{1}{2}} (h_E |w|_{H^1(T)} + \|w\|_{L^2(T)})$$

Ende des Einschubs

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\Psi - \tau\|_{L^2(E)} &\leq Ch_E^{-\frac{1}{2}} (h_E |\Psi - \tau|_{H^1(T)} + \underbrace{\|\Psi - \tau\|_{L^2(T)}}_{\leq Ch_T |\Psi|_{H^1(T)} \text{ Bramble-Hilbert}}) \\ &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla \Psi\|_{L^2(T)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha &:= \frac{1}{|E|} \int_E (U - u) d\gamma \\
 \|J(U - \alpha)\|_{L^2(E)} &\stackrel{J(u)=0}{=} \|J(U - u - \alpha)\|_{L^2(E)} \\
 &\leq \|U_+ - u - \alpha\|_{L^2(E)} + \|U_- - u - \alpha\|_{L^2(E)} \\
 &\leq Ch^{\frac{1}{2}} (\|U_+ - u\|_{H^1(T_+)} + \|U_- - u\|_{H^1(T_-)}) \\
 &\hspace{15em} \text{Spursatz, Bramble – Hilbert} \\
 &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|U - u\|_{H^1(w_E)} \\
 &= Ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla e\|_{L^2(w_E)} \\
 \Rightarrow \int_E \nabla u^T K n_E J(U) d\gamma &\leq Ch^{\frac{1}{2}} \|\nabla \Psi\|_{L^1(w_E) h^{\frac{1}{2}}} \|\nabla e\|_{L^2(w_E)} \\
 \Rightarrow \sum_E \int_E \nabla u^T K n_E J(U) d\gamma &\leq Ch \|\nabla(K \nabla u)\|_{L^2(\Omega)} \|e\|_{H^1(T)}
 \end{aligned}$$

□

Wir erhalten also $\|u - U\|_{H^1(T)} \leq Ch(\dots u \dots)$.

Bemerkung

Möglich ist durch einen Dualitätsansatz auch $\|u - U\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2(\dots u \dots)$.

Vorlesung am 05.01.2009

Kapitel 9

A posteriori Fehlerkontrolle

9.1 Fehler und Residuen

Es seien

- $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform für reflexive \mathbb{R} -Banachräume
- $x \in X$ Lösung von $b(x, \cdot) = F \in Y^*$

Für konforme FE-Approximation seien $X_\ell \times Y_\ell \subseteq X \times Y$ abgeschlossene Teilräume mit $x_\ell \in X_\ell : \forall y_\ell \in Y_\ell : b(x_\ell, y_\ell) = F(y_\ell)$.

Das kontinuierliche Problem sei wohlgestellt, d.h. $B : X \rightarrow Y^*, x \mapsto b(x, \cdot)$ ist ein Isomorphismus. Insbesondere ist $x = B^{-1}F$ eindeutig bestimmt. Über das diskrete Problem wird nur vorausgesetzt, dass $x_\ell \in X$ mit $b(x_\ell, \cdot) = F$ auf Y_ℓ existiert.

Der Fehler sei $e = x - x_\ell$ und das Residuum $R = F - b(x_\ell, \cdot) \in Y^*$. Es gilt $Y_\ell \subseteq \ker R$.

Satz 9.1. *Es gilt $\|e\|_X \approx \|R\|_{Y^*}$.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \|e\|_X &= \|B^{-1}R\|_X \leq \|B^{-1}\| \cdot \|R\|_{Y^*} && , \text{ denn } R = b(e, \cdot), \text{ d.h. } e = b^{-1}R \\ \|R\|_{Y^*} &= \|b(e, \cdot)\|_{Y^*} \leq \|b\| \cdot \|e\|_X \end{aligned}$$

Modellbeispiel

Wir betrachten das Poisson-Problem mit:

- $-\Delta u = f$ in Ω
- $u|_{\partial\Omega} = 0$
- $b(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$
- $F(v) = \int_\Omega f v \, dx$
- $f \in L^2(\Omega), u, v \in V = H_0^1(\Omega)$

Bemerkung

Im Hilbert-Raum $X = V = Y$ sei $\|\cdot\|_X = b(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ durch das Skalarprodukt b induziert. Dann gilt $\|e\|_X = \|R\|_{X^*}$ vermöge des Rieß-Isomorphismus.

Satz 9.2. *Im Hilbert-Raum X mit $\|\cdot\| = b(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ gilt für $y \in X = Y$ mit $\|y\| = 1$ für den relativen Fehler von $R(y)$ als Approximation von $\|e\| \neq 0$:*

$$\frac{\|e\| - R(y)}{\|e\|} = \frac{1}{2} \left\| y - \frac{e}{\|e\|} \right\|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\|e\| - R(y)}{\|e\|} &= \frac{\|e\| - b(e, y)}{\|e\|} = 1 - b\left(\frac{e}{\|e\|}, y\right) \\ &= \frac{1}{2} b\left(\frac{e}{\|e\|}, \frac{e}{\|e\|}\right) - b\left(\frac{e}{\|e\|}, y\right) + \frac{1}{2} \underbrace{b(y, y)}_{=1} \\ &= \frac{1}{2} \left\| y - \frac{e}{\|e\|} \right\|^2 \end{aligned}$$

□

Bemerkung

Der Satz besagt, dass $R(y)$ genau dann eine gute Approximation von $\|e\| > 0$ ist, falls $y \cdot \|e\|$ eine gute Approximation zu e ist. Also ist die Lösung der Maximierungsaufgabe zur Berechnung von $\|R\|_{Y^*}$ gleichwertig zur Berechnung von x selbst. Anstatt $\|R\|_{Y^*}$ exakt zu berechnen, nutzt man diverse Techniken, um obere und untere Abschätzungen mit vertretbarem Aufwand zu erhalten.

9.1.1 Untere Schranken im Modellbeispiel

Sei $V = X = H_0^1(\Omega) \supseteq V_\ell = P_\ell(\mathcal{T}_\ell) \cap V$ für P_k -FEMm bezüglich einer regulären Triangulierung \mathcal{T}_ℓ von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in Dreiecke. Die FEM-Lösung $u_\ell \in V_\ell$ definiert:

$$P_\ell = \nabla u_\ell \in P_{k-1}(\mathcal{T}, \mathbb{R}^2)$$

mit Sprüngen

$$[P_\ell]_E = (P_\ell|_{T_+})|_E - (P_\ell|_{T_-})|_E$$

für eine Innenkante $E = \partial T_+ \cap \partial T_- \in \mathcal{E}_\ell$ und Kanten-Patch $\omega_E = \text{int}(T_+ \cup T_-)$.

Auf E gilt

$$[P_\ell]_E \cdot \nu_E = (P_\ell|_{T_+}) \cdot \nu_{T_+} + (P_\ell|_{T_-})_E - (P_\ell|_{T_-})_E$$

$R_{\mathcal{T}} = f + \text{div}_\ell P_\ell \in L^2(\Omega)$ mit \mathcal{T}_ℓ -stückweiser Divergenz div_ℓ .

$R_{\mathcal{E}} \in L^2(\bigcup \mathcal{E}_\ell)$ definiert vermöge $R_{\mathcal{E}}|_E = R_E = -[P_\ell]_E \cdot \nu_E \in P_{k-1}(E)$

Satz 9.3. (Residuendarstellungsformel) *Für $v \in V$ ist*

$$R(v) = \int_{\Omega} R_{\mathcal{T}} v \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \int_E R_{\mathcal{E}} v \, ds$$

Beweis:

$$\begin{aligned} R(v) &= F(v) - b(u_\ell, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \int_T ((fv) - P_\ell \cdot \nabla v) dx \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} (f + \operatorname{div} T_\ell) v dx - \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \int_T v (R_\ell \cdot \nu_\ell) ds \\ &= \int_\Omega R_{\mathcal{T}} v dx - \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \int_E [P_\ell]_E \nu_E ds \end{aligned}$$

Nichtkonforme und gemischte FEM

Im Posson-Problem ist

$$a((p, u), (q, v)) := \int_\Omega pq dx - \int_\Omega p \nabla v dx - \int_\Omega q \nabla u dx$$

für $(p, u), (q, v) \in L \times V =: X, L = L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ eine stetige Bilinearform auf X , die die inf-sup-Bedingung erfüllt, sodass $A : X \rightarrow X^*, (q, v) \mapsto ((q, v), \cdot)$ ein Isomorphismus ist.

Also existiert $x = (p, u)$ mit $a((p, u), (q, v)) = F(v)$ für alle $(q, v) \in X$. (Das führt auf $\int_\Omega p \nabla u dx = -F(v)$ für alle v , d.h. $f + \operatorname{div} p = 0$ sowie $\int_q (p - \nabla u) dx = 0$ für alle q , d.h. $p = -\nabla u$.)

Für bekannte Approximation $P_\ell \in L$ und $u_\ell \in L^2(\Omega)$ mit i.a. $u_\ell \notin V$ sowie $\tilde{u}_\ell \in V$ gilt für den "Fehler" $(p - p_\ell, u - \tilde{u}_\ell)$ und den Residuen

$$R(q, v) = F(v) - a((p_\ell, \tilde{u}_\ell), (q, v)) = - \underbrace{\int_\Omega (fv - p_\ell - \nabla v) dx}_{=R_V(V)} - \underbrace{\int_\Omega q \cdot (p_\ell - \nabla \tilde{u}_\ell) dx}_{=R_L(q)}$$

gilt

$$\|p - p_\ell\|_L + \|u - \tilde{u}_\ell\|_V \approx \|R_V\|_V + \|R_L\|_L$$

Man beachte: R_V gleicht den Residuuum für das konforme Modell-Poisson-Problem und erlaubt eine analoge Residuendarstellungsformel und $L \equiv L^*$ impliziert $\|R_L\|_L = \|p_\ell - \nabla \tilde{u}_\ell\|_{L^2(\Omega)}$.

Vorlesung am 07.01.2009

Recall:

(p_ℓ, u_ℓ) some FE approximations and \tilde{u}_ℓ arbitrary in $V = H_0^1(\Omega)$ to approximate $p_\ell = \nabla a + \operatorname{Curl} b$ for some $a \in V$ and $b \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$. a is the unique solution of $-\operatorname{div} p_\ell = \Delta a$ in Ω and $a/\partial\Omega = 0$.

(p, u) is the exact solution and it holds with $\tilde{u}_\ell = a$ and $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$:

$$\|p - p_\ell\| + \|\nabla u - \nabla \tilde{u}_\ell\| \approx \|R_V\|_{V^*} + \|p_\ell - \nabla \tilde{u}_\ell\|$$

Beispiel (P_1 -FEM)

$p_\ell = \nabla u_\ell$ for $u_\ell \in V_\ell^C \subseteq V, a = u_\ell, b = 0$

$\|u - u_\ell\| \approx \|R_V\|_{V^*}$ for $R_V := F - a(u_\ell, \cdot)$

Beispiel ($CR_1 - FEM$)

$p_\ell = \nabla_\ell u_\ell^N$ for $u_\ell^N \in V_\ell^N \subset V, a, b$ from Helmholtz decomposition with $b \neq 0$, i.g.

$$\|u - u_\ell^N\|_\ell := \|\nabla_\ell(u - u_\ell^N)\| \approx \|R_V\|_{V^*} + \|\operatorname{Curl} b\|$$

for $R_V(V) := F(V) - \int_\Omega \nabla_\ell u_\ell^N = \nabla v dx$ for $v \in V$

Beispiel (RT_0 -FEM)

$p_\ell \in RT_0(\mathcal{T}_\ell)$ and $u_\ell^M \in P_0(\mathcal{T}_\ell) \not\subseteq V$ (in general), a,b from Helmholtz decomposition of p_ℓ

$$\|p - p_\ell\| + \|\nabla u - \nabla \tilde{u}_\ell\| \approx \|R_V\|_{V^*} + \|\text{Curl } b\|$$

but now:

$$R(v) := \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} p_\ell \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (f + \underbrace{\text{div } p_\ell}_{=-f_\ell}) v \, dx$$

$$R(v) = \int_{\Omega} (f - f_\ell)(v - \bar{v}_\ell) \, dx$$

for any $\bar{v}_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$

$$R(v) \leq \underbrace{\|h_\ell(f - f_\ell)\|}_{=\text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)} \underbrace{\|h_\ell^{-1}(v - \bar{v}_\ell)\|}_{\leq \frac{1}{\pi} \|\nabla v\|}$$

Poincare inequality on each $T \in \mathcal{T}_\ell$.

Hence, $\|R_V\|_{V^*} \leq \frac{1}{\pi} \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)$.

Bemerkung

Residual from residual representation formula satisfies

- P_1 & CR_1 : $V_1^c \subseteq \ker R_V$
- RT_0 : $\|R_V\|_{V^*} \leq \frac{\text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)}{\pi}$

Application to Elasticity

Given $g \in L^2(\Omega)^2$, $u \in V := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$\sigma := \mathbb{C} \underbrace{\varepsilon(u)}_{=\text{sym } Du} \in L := L^2(\Omega, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{n \times n})$ etc. from linear elasticity define

$$A : X \rightarrow X^* \text{ by } (A(\sigma, u))(\tau, v) := \int_{\Omega} \sigma : \mathbb{C}^{-1} \tau \, dx - \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, dx - \int_{\Omega} \tau : \varepsilon(u) \, dx$$

for $(\sigma, u), (\tau, v) \in X = L \times V$

One proves that A is linear, bounded isomorphic and $\|A\| + \|A^{-1}\|$ bounded as $\lambda \nearrow \infty$ for the Lamé parameters λ, μ in \mathbb{C} [BCR] and so

$$\|\sigma - \sigma_\ell\| + \|\varepsilon(u - \tilde{u}_\ell)\| \approx \|R_v\|_{V^*} + \|\mathbb{C}^{-1} \sigma_\ell - \varepsilon(\tilde{u}_\ell)\|$$

for some FE discrete solution σ_ℓ, u_ℓ and “ \approx ” is robust in $\lambda \nearrow \infty$.

Recall that $R_v(V) := \int_{\Omega} g(x) \cdot v(x) \, dx - \int_{\Omega} \sigma - l : \varepsilon(v) \, dx$ allows for some residual representation formular. It holds

$$V_\ell := P_1(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^2) \cap V \subseteq \ker R_V$$

for all conforming and non conforming FEM.

Application to Stokes Equations

Same notation as in linear elasticity but $\sigma = 2\mu\varepsilon(u) - p\mathbf{1}$ for velocity field $u \in V$, pressure $p \in L_0^2(\Omega)$ and discrete analogs $\sigma_\ell = 2\mu\varepsilon(u_\ell) - p_\ell\mathbf{1} \in L$. It holds

$$\|\sigma - \sigma_\ell\| + \|u - \tilde{u}_\ell\|_V \approx \|Res_V\|_{V^*} + \|\varepsilon(\tilde{u}_\ell) - \text{dev } \varepsilon_\ell(u_\ell)\|$$

with $\text{dev}(\cdot) := (\cdot) - \frac{1}{n}\text{tr}(\cdot)\mathbf{1}$ and $Res_V(v) := \int -\Omega(gv - \sigma_\ell : \varepsilon(v)) dx$.

Notice:

$$\|\varepsilon(\tilde{u}_\ell) - \text{dev } \varepsilon_\ell(u_\ell)\|^2 = \|\text{dev}(\varepsilon_\ell(\tilde{u}_\ell - u_\ell))\|^2 + \frac{1}{n}\|\text{div } \tilde{u}_\ell\|^2$$

$$\varepsilon_\ell := \text{sym } D_\ell$$

9.2 Residuals and Discrete Testfunctions

- \mathcal{T}_ℓ regular triangulation into triangles and parallelograms, $n = 2$
- $V_\ell := P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap V \subseteq H_0^1(\Omega)$
- \mathcal{N}_ℓ set of nodes = vertices in \mathcal{T}_ℓ
- \mathcal{K}_ℓ set of free nodes = $\mathcal{N}_\ell \cap \Omega$
- \mathcal{E}_ℓ set of interior edges
- $(\varphi_z)_{z \in \mathcal{K}_\ell}$ nodal basis of V_ℓ
- Triangulation is shape regular, i.g.. $h_E = |E| \approx \text{diam}(T) \approx |T|^{\frac{1}{2}}$, $E \in \mathcal{E}(T), T \in \mathcal{T}_\ell$, etc.

Definition (Edge-bubble-function)

$E = \partial T_- \cap \partial T_+ \in \mathcal{E}_\ell$ for some $T_+, T_- \in \mathcal{T}_\ell$

$w_E = \text{int}(T_+ \cap T_-)$

$$\int_E \psi_E ds = 1$$

Definition (Cell bubble function)

$T \in \mathcal{T}_\ell$, ψ_T cell bubble function, iff $\psi_T \in W_0^{1,\infty}(T)$ and $\int_T \psi_T dx = 1$.

Bemerkung

If $\{\psi_M | M \in \mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell\}$ is known one can w.l.o.g. assume that $\int_T \psi_E dx = 0$ for all $T \in \mathcal{T}_\ell$ and $E \in \mathcal{E}_\ell$ by taking

$$\psi_E^{new} := \psi_E^{old} - \alpha_+ \psi_{T_+} - \alpha_- \psi_{T_-}$$

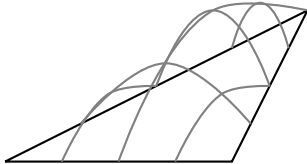
for $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ and α_+, α_- with $\alpha_\pm = \int_{T_\pm} \psi_E dx$ and we suppose $\alpha_\pm \approx 1$.

Beispiel

1. After Verfürth for $E = \text{conv}\{a, b\}$ for $a, b \in \mathcal{N}_\ell$. $\psi_E := \varphi_a \varphi_b$

$$\int_a^b ds = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\psi_T = \varphi_a \varphi_b \varphi_c \text{ for } \mathcal{N}(T) = \{a, b, c\} \subseteq \mathcal{N}_\ell$$



TODO

mehr Linien?

Recall:

$$\int_T \varphi_a^\alpha \varphi_b^\beta \varphi_c^\gamma dx = 2|T| \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!}$$

Remark: Modify $\psi_E = 6\varphi_a\varphi_b$

2. After Dörfler for $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ by refinement as shown:

TODO

Bild

such that $mid(E)$ is a new node in the refined triangulation \mathcal{T}_{l+1} and $\psi_E = 2\varphi_{mid(E)}$ is a multiple of a related nodal basis function in $V_{l+1} = p_\ell(\mathcal{T}_{l+1}) \cap V$.

Definition

For $f \in L^2(\Omega), \omega \in \Omega$ open and connected define $osc(f, \omega) = |\omega|^{\frac{1}{2}} \|f - f_\omega\|_{L^2(\omega)}$ for $f_\omega = \int_\omega f(x) dx$, $osc(R_E, E)$ etc. defined similarly.

Satz 9.4. Given $(R_m | M \in \mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell) \in \prod_{M \in \mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell} L^2(M)$ define:

$$R \in V^* \text{ by } R(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \int_T R_T v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \int_E R_E v ds$$

Given discrete functions $(\psi_M | M \in \mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell)$ as above it holds for $T \in \mathcal{T}_\ell$ and $E \in \mathcal{E}_\ell$

$$\mu_T = \frac{R(\psi_T)}{\|\psi_T\|} \lesssim |T|^{\frac{1}{2}} \|R_T\|_{L^2(T)} = \eta_T \lesssim +osc(R_T, T)$$

$$\mu_E := \frac{R(\psi_E)}{\|\psi_E\|} \lesssim \underbrace{|E|^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{L^2(E)}}_{=\eta_E} + osc(R_{T_+}, T_+) + osc(R_{T_-}, T_-)$$

$$\mu_E \lesssim \mu_E + osc(R_{T_+}, T_+) + osc(R_{T_-}, T_-) + \underbrace{osc(R_E, E)}_{=|E|^{\frac{1}{2}}} \|R_E - \bar{R}_E\|_{L^2(E)} \text{ for } R_E = \int_E R_E ds$$

Vorlesung am 12.01.2009

Beweis:

$$|R(\psi_T)| = \left| \int_T R_T dx \right| \leq \|\psi_T\|_{L^2(T)} \|R_T\|_{L^2(T)} \approx \underbrace{|T|^{\frac{1}{2}} \|R_T\|_{L^2(T)}}_{\eta_T}$$

$$\|\psi_T\|_{L^\infty(T)} \approx 1, \psi_T \in W_0^{1,\infty}(T), |\psi_T|_{H^1(T)} \approx h_T^{-1} |T|^{\frac{1}{2}} \approx 1$$

For $T \in \mathcal{T}_\ell$.

Hence $\mu_T = \frac{|R(\psi_T)|}{|\psi_T|_{H^1(T)}} \lesssim \eta_T$.

$$R(\psi_E) = \int_E \psi_E R_E ds = \underbrace{\int_{T_+} \psi_E R_{T_+} dx}_{=\int_{T_+} \psi_E (R_{T_+} - \bar{R}_{T_+}) dx, \text{ for any constant } R_{T_+}} + \int_{T_-} \psi_E R_{T_-} dx$$

$$E = \partial T_+ \cap T_-$$

$$\begin{aligned} \int_{T_\pm} \psi_E dx &= 0, \|\psi_E\|_{L^\infty} \approx 1 \lesssim |E|^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{L^2(E)} = 1_E \\ \int_{T_+} \psi_E (R_{T_+} - \bar{R}_{T_+}) dx &\leq \underbrace{\|\psi_E\|_{L^2(T_+)}}_{\approx |T_+|^{\frac{1}{2}}} \|R_{T_+} - \underbrace{\bar{R}_{T_+}}_{= \int_{T_+} R_{T_+} dx}\|_{L^2(T_+)} \lesssim \text{osc}(R_{T_+}, T_+) \\ \mu_E &\lesssim \underbrace{|E|^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{L^2(E)}}_{1_E} + \text{osc}(R_{T_+}, T_+) + \text{osc}(R_{T_-}, T_-) \end{aligned}$$

Proof of converse:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{R}_T}_{\int_T \psi_T dx} \underbrace{|T|}_{\int_T \psi_T dx} &= \int_T R_T dx = \int_T \bar{R}_T \psi_T dx = \int_T (\bar{R}_T - R_T) \psi_T dx + \underbrace{\int_T R_T \psi_T dx}_{R_T(\psi_T)} \\ \Rightarrow |R(\psi_T) - |T| \bar{R}_T| &\leq \left| \int_T (R_T - \bar{R}_T) \psi_T dx \right| \leq \|\psi_T\|_{L^2(T)} \|R_T - \bar{R}_T\|_{L^2(T)} \approx \text{osc}(R_T, T) \end{aligned}$$

Hence

$$\eta_T^2 = |T| \cdot \|R_T - \bar{R}_T\|_{L^2(T)}^2 + \underbrace{|T| \|\bar{R}_T\|_{L^2(T)}^2}_{=(|T| \|R_T\|)^2} \lesssim \text{osc}(R_T, T)^2 + \left(\frac{|R(\psi_T)|}{|\psi_T|_{H^1(T)}} \right)^2$$

since $|\psi_T|_{H^1(T)} \approx 1$. Same arguments for

$$\eta_E^2 = \underbrace{|E| \cdot \|R_E - \bar{R}_E\|_{L^2(E)}^2}_{\approx \text{osc}(R_E, E)^2} + \underbrace{|E| \cdot \|\bar{R}_E\|_{L^2(E)}^2}_{\lesssim |\int_E (\bar{R}_E - R) \psi_E ds|^2 + |\int_E \psi_E R_E ds|^2}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_E (\bar{R}_E - R) \psi_E ds \right|^2 + \left| \int_E \psi_E R_E ds \right|^2 &\lesssim \text{osc}(R_E, E) + |R(\psi_E)|^2 + \underbrace{\left| \int_{T_+} \psi_E (R_{T_+} - \bar{R}_{T_+}) dx \right|^2}_{\lesssim \text{osc}(R_{T_+}, T_+)^2 + \left| \int_{T_-} \psi_E (R_{T_-} - \bar{R}_{T_-}) dx \right|^2} \end{aligned}$$

□

Bemerkung

If $R(v) = a(e, v)$ as in the Poisson model problem, then

$$\mu_E \lesssim |e|_{H^1(\omega_E)} + \underbrace{\text{osc}(R_E, E) + \text{osc}(R_{T_+}, T_+) + \text{osc}(R_{T_-}, T_-)}_{\approx \text{osc}(f, \{T_+, T_-\}) \text{ for } P_1\text{-FEM}}$$

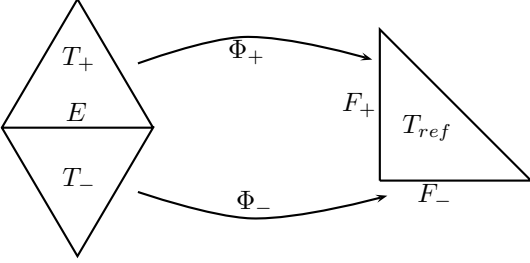
and $\mu_T \lesssim |e|_{H^1(T)}$ for error $e = u - u_\ell$. Since $(\omega_E)_{E \in \mathcal{E}_\ell}$ have finite overlap, this amounts to $\eta_\ell, \mu_\ell \lesssim |e|_{H^1(\Omega)} + \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)$ (Efficiency) where

$$\eta_\ell = \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \eta_E^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_T^2}$$

$$\mu_\ell = \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \mu_E^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \mu_T^2}$$

$$\text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell) = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \text{osc}(f, T)^2}$$

Satz 9.5. ($\|R\|_{(V_\ell+W)^*} \approx \mu_\ell$) *On reference triangle $T_{ref} = \text{conv}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ there exist ψ_E^{ref} , $E \in \mathcal{E}(T_{ref})$ and ψ_T^{ref} bubble functions with above properties. For any T in regular triangulation \mathcal{T}_ℓ there exists affine diffeomorphism $\Phi : T \rightarrow T_{ref}$ with $\Psi_E|_T = \psi_E^{ref} \circ \Phi$ for all $E \in \mathcal{E}_\ell$, some $F \in \mathcal{E}(T_{ref})$ and $\Psi_T := \psi_T^{ref} \circ \Phi$.*



Then, $W = \text{span}\{\Psi_E|E \in \mathcal{E}_\ell\} \oplus \text{span}\{\Psi_T|T \in \mathcal{T}_\ell\}$ and $R \in V^*$ with $V_\ell \subseteq \ker R$ satisfy

$$\mu_\ell \approx \|R\|_{(V_\ell \oplus W)^*} \approx \|R\|_{W^*}$$

Beweis:

1. $T = T_{ref}$ with $(\psi_0, \dots, \psi_3) := (\psi_{T_{ref}}^{ref}, \psi_{E_1}^{ref}, \psi_{E_2}^{ref}, \psi_{E_3}^{ref})$ for $\mathcal{E}(T_{ref}) = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\Phi = \text{id}$.
 $W(T) = \text{span}\{\Psi_0, \dots, \Psi_3\}$, $\dim W(T) = 4$.

(they are lin. independent since $\sum_{j=0}^3 \alpha_j \Psi_j = 0$ on $T = T_{ref}$ for $\alpha_0, \dots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ implies

$$0 = \int_T \left(\sum \alpha_j \Psi_j \right) dx = \alpha_0 |T| + \alpha_1 \cdot 0 + \dots = \alpha_0 |T|$$

Hence, $\alpha_0 = 0$.

$$0 = \int_{E_k} \left(\sum_{j=0}^3 \alpha_j \Psi_j \right) dt = \alpha_k \int_{E_k} \Psi_k dx = \alpha_k |E_k|$$

$\Rightarrow \alpha_k = 0$ for $k = 1, 2, 3$

Define three different seminorms on $P_1(T) \oplus W(T)$, $P_1(T) = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_3\}$ with

$$\underbrace{\sum_{j=0}^3 \alpha_j \Psi_j}_{\text{vanishes on all 3 vertices of } T} + \sum_{K01}^3 \beta_k \varphi_k \in P_1(T) \oplus W(T)$$

and $(\alpha_0, \dots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $(\beta_1, \dots, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \varrho_1(\alpha_0, \dots, \alpha_3) &= \left| \sum_{j=0}^3 \alpha_j \psi_j \right|_{H^1(T)} \\ \varrho_2(\alpha_0, \dots, \alpha_3) &= \sum_{j=0}^3 |\alpha_j| |\Psi_j|_{H^1(T)} \\ \varrho_3(\alpha_0, \dots, \alpha_3) &= \min_{g \in P_1(T)} \left| g - \sum_{j=0}^3 \alpha_j \Psi_j \right|_{H^1(T)} \end{aligned}$$

Those are seminorms on \mathbb{R}^4 . (And indeed norms!)

$$\varrho_2(\alpha_0, \dots, \alpha_3) \approx |(\alpha_0, \dots, \alpha_3)|_{\ell^1(\mathbb{R}^4)}$$

All three norms are equivalent: $\varrho_1 \approx \varrho_2 \approx \varrho_3$

2. $T = \Phi^{-1}(T_{ref}) \in \mathcal{T}_\ell$ (arbitrary)

$$\Psi_E = \Psi_F^{ref} \circ \Phi \text{ and}$$

$$D\Psi_E = D\Psi_F^{ref} \circ \underbrace{D\Phi}_{=B \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ const}}$$

Transformation of norms shows

$$\varrho_1(\alpha_0, \dots, \alpha_3) = \left| \sum_{j=0}^3 \alpha_j \Psi_j \right|_{H^1(T)} \approx \sum_{j=0}^3 |\alpha_j| \approx \min_{g_T \in P_1(T)} \left| \sum \alpha_j \Psi_j - g_T \right|_{H^1(T)}$$

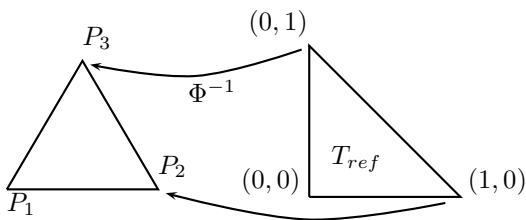
3. Completing the proof is left as an exercise.

Vorlesung am 14.01.2009

Step II

$T \in \mathcal{T}_\ell, \Phi : T \rightarrow T_{ref}$ affine, $T = \text{conv}\{P_1, P_2, P_3\}$,

$$\Phi^{-1}(x, y) = P_1 + \underbrace{(P_2 - P_1, P_3 - P_1)}_{=: B = D\Phi^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\Phi_j|_T = \Phi_j^{ref} \circ \Phi \in H^1(T), j = 0, \dots, 3$$

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{j=0}^3 \alpha_j \underbrace{\nabla \varphi_j}_{= \nabla \varphi_j^{ref}} \underbrace{\Bigg|}_{= B^{-1}} \right\|^2 &= \sum_{j,k=0}^3 \alpha_j \alpha_k \int_T \nabla \varphi_j^{ref} B^{-1} B^{-T} \nabla \varphi_k^{ref T} (\Phi(x)) d\xi \\
 &= \sum_{j,k=0}^3 \alpha_j \alpha_k \int_{T_{ref}} \nabla \varphi_j^{ref}(\xi) C \nabla \varphi_k^{ref}(\xi)^T dx \\
 &\text{for } C = (\det B) B^{-1} B^{-T} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \\
 &\quad \xi = \Phi(x), d\xi = |\det(D\Phi)| dx = \frac{dx}{|\det B|} \\
 &= \left\| \left(\sum_{j=0}^3 \alpha_j \nabla \varphi_j^{ref} \right) C^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(T_{ref})}^2 \\
 &= \int_{T_{ref}} \underbrace{\text{vektor}(x)^T \cdot C \cdot \text{vektor}(x)}_{\leq \lambda_{max}(C) \cdot |\text{vektor}(x)|^2 \lesssim |\text{vektor}(x)|^2} dx \\
 &\approx \left\| \sum_{j=0}^3 \alpha_j \nabla \varphi_j^{ref} \right\|_{L^2(T_{ref})}^2 \\
 &\text{because the Eigenvalues of } C \text{ are positive and of order 1 } (*)
 \end{aligned}$$

From our convention follows $\det B = 2|T| \geq 0$, hence $|\det B| = \det B$.

Proof of (*): Eigenvalues of $C^{-1} = \frac{1}{2|T|} B^T B$.

$$|C^{-1}| \lesssim \frac{h_T}{|T|} \approx 1$$

$$xC - 1x = \frac{|Bx|^2}{2|T|}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2, |x|=1} |Bx|^2 \approx h_T^2$$

with equivalence constants, which depend on interior angles only and which degenerate for angles $\searrow 0$ and $\nearrow \pi$.

The minimum angle condition is, that the smallest inner angles stays away from 0. The maximum angle condition is, that the largest inner angles stays away from π .

The last one is sufficient.

Step III

$$\mu_\ell \gtrsim \|R_\ell\|_{W^*}$$

For

$$\begin{aligned}
 w_\ell &= \sum_{M \in \mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell} \alpha_M \psi_M \in W \\
 R_\ell(w_\ell) &= \left| \sum_{M \in \mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell} \underbrace{\frac{R(\Psi_M)}{|\Psi_M|_{H^1(\Omega)}}}_{=\mu_M \sigma_M} |\Psi_M|_{H^1(\Omega)} \alpha_M \right| \\
 &\quad \text{for } \sigma_M = \text{sign}(R(\Psi_M)) \in \{\pm 1\} \\
 &\leq \underbrace{\left| \sum_M \mu_M^2 \sigma_M^2 \right|^{\frac{1}{2}}}_{=:\mu_\ell} \cdot \underbrace{\left| \sum_M \alpha_M^2 |\Psi_M|_{H^1(\Omega)}^2 \right|^{\frac{1}{2}}}_{\approx |\sum_M \alpha_m \psi_M|_{H^1(\Omega)}}
 \end{aligned}$$

Because for each $T \in \mathcal{T}_\ell$ with $\mathcal{E}(T) = \{E_1, E_2, E_3\}$:

$$\begin{aligned}
 |W_\ell|_{H^1(T)}^2 &= \left| \sum_{M \in \{T, E_1, E_2, E_3\}} \alpha_M \Psi_M \right|_{H^1(T)}^2 \\
 &\approx \sum_{M \in \{T\} \cup \mathcal{E}(T)} \alpha_M^2 |\Psi_M|_{H^1(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu_\ell \gtrsim \|R_\ell\|_{W^*}$$

Step IV

$$\begin{aligned}
 \mu_\ell^2 &= \sum_{M \in \mathcal{E}_\ell \cup \mathcal{T}_\ell} \underbrace{\frac{R_\ell(\Psi_M) \sigma_M}{|\Psi_M|}}_{=\mu_M} \mu_M \\
 &= R_\ell(W_\ell) \leq \|R_\ell\|_{W^*} |W_\ell|_{H^1(\Omega)} \\
 W_\ell &= \sum_M \underbrace{\frac{\sigma_M \mu_M}{|\Psi_M|_{H^1(\Omega)}}}_{=\alpha_M} \Psi_M \in W \\
 &\lesssim \|R_\ell\|_{W^*} \mu_\ell
 \end{aligned}$$

since

$$|W_\ell|_{H^1(\Omega)}^2 \approx \sum_M \underbrace{\alpha_M^2 |\Psi_M|_{H^1(\Omega)}^2}_{=\mu_M^2} \approx \mu_\ell^2$$

Step V: $\|R_\ell\|_{W^*} \approx \|R_\ell\|_{(V_\ell \oplus W)^*}$
 Under extra condition $V_\ell \subseteq \ker R_\ell$.
 We have to prove

$$\forall w_\ell \in W : |w_\ell|_{H^1(\Omega)} \approx \min_{v_\ell \in V_\ell} |w_\ell - v_\ell|_{H^1(\Omega)}$$

\geq is obvious. We will only prove \lesssim .

This follows from

$$|w_\ell|_{H^1(T)} \approx \min_{A \in \mathbb{R}^2} \|Dw_\ell - A\|_{L^2(T)} \leq \|Dw_\ell - Dv_\ell\|_{H^1(T)}$$

(“ \approx ” follows from Steps I and II.)

for all $T \in \mathcal{T}_\ell$ and $v_\ell \in V_\ell$. □

Bemerkung

Poisson model problem

$$V_{\ell+1} = V_\ell \oplus W_\ell \text{ and } \|R_\ell\|_{V_{\ell+1}^*} = \|u_{\ell+1} - u_\ell\|.$$

9.3 Approximation Operators

\mathcal{T}_ℓ regular triangulation of $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ in shape regular n -simplices (e.g. min-angle-condition) with set of faces \mathcal{F}_ℓ and $\Gamma_D = \bigcup \mathcal{F}_{\ell,D} \subseteq \partial\Omega$ is closed, nonvoid subset of $\partial\Omega$ matched by some faces $\mathcal{F}_{\ell,D} = \{F \in \mathcal{F}_\ell | F \subseteq \Gamma_D\}$. \mathcal{N}_ℓ set of nodes, $\mathcal{K}_\ell = \mathcal{N}_\ell \setminus \Gamma_D$ free nodes.

$(\varphi_z | z \in \mathcal{N}_\ell)$ nodal basis of $P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap C(\overline{\Omega})$ and

$$\begin{aligned} V_\ell &= \text{span}\{\varphi_z | z \in \mathcal{K}_\ell\} \\ &= \{v_\ell \in P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap C(\overline{\Omega}) | v_\ell = 0 \text{ along } \Gamma_D\} \\ &\subset V := H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) | v = 0 \text{ along } \Gamma_D\} = P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap V = V(\mathcal{T}_\ell) \end{aligned}$$

Aim: Operator $J : V \rightarrow V_\ell$ with stability & approximation property, not true for nodal interpolation because $V \subset C(\overline{\Omega})$.

J : approximation operator also called weak interpolation operator.

Oswald approximation operator (misleadingly too often also called Clément interpolation operator):

$$(Jv)(z) := \int_{w_z} v(x) dx \text{ for } v \in V, z \in \mathcal{K}_\ell \text{ with patch } w_z = \text{int}(\bigcup \mathcal{T}_\ell(z)), \mathcal{T}_\ell(z) = \{T \in \mathcal{T}_\ell | z \in \mathcal{N}(T)\}, \mathcal{N}(T) = \text{set of } n+1 \text{ vertices of } T$$

Vorlesung am 19.01.2009

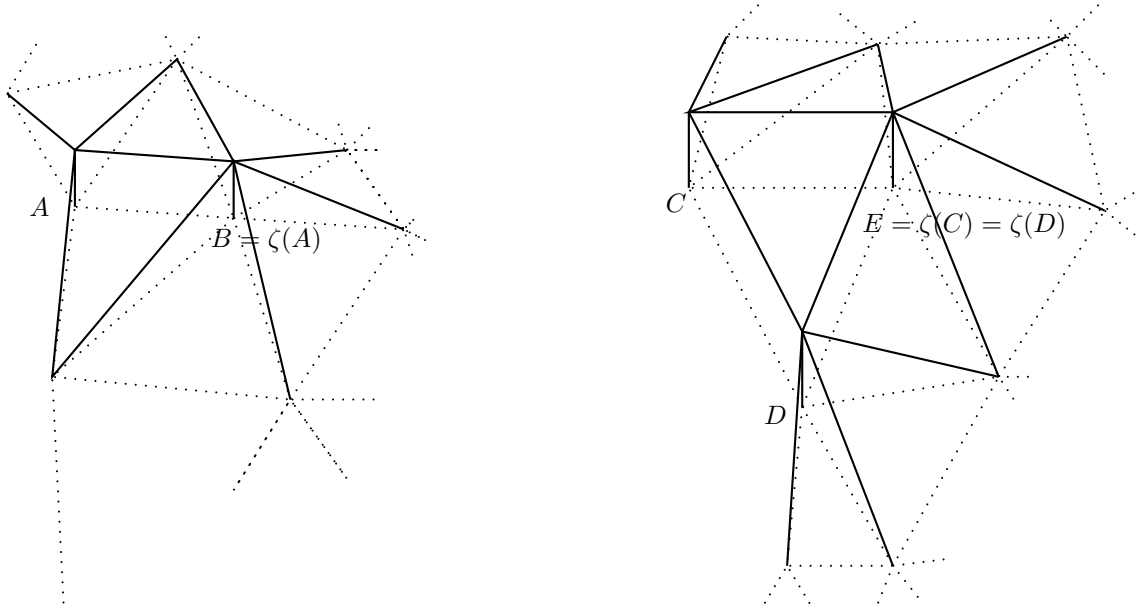
Clément interpolation operator

Given $v \in V = H_0^1(\Omega)$ define $J_\ell v \in V_\ell := P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap V$ via $(J_\ell v)(z) := v_z(z)$ for $z \in \mathcal{K} = \mathcal{N} \setminus \Gamma_D$ and $v_z \in P_1(\omega_z)$ with $\|v - v_z\|_{L^2(\omega_z)} = \min_{w_z \in P_1(\omega_z)} \|v - w_z\|_{L^2(\omega_z)}$.

NB: generalisation to P_k, Q_k -FEM is immediate. Replace $P_1(\omega_z)$ by $P_0(\omega_z)$ to obtain Oswald.

Weighted-approximation-operator

$(\varphi_z | z \in \mathcal{N})$ is partition of unity, but, i.g., $(\varphi_z | z \in \mathcal{K}_\ell)$ is not, because all those nodal basis functions vanish near Γ_D . For simplicity, suppose that each element domain $T \in \mathcal{T}_\ell$ has at least one vertex z in \mathcal{K}_ℓ . Hence, for all $z \in \mathcal{N}_\ell$ there exists $\zeta(z) \in \mathcal{K}_\ell$ and $T \in \mathcal{T}_\ell$ with $\{z, \zeta(z)\} \subseteq \mathcal{N}(T)$. Let $\zeta(z) = z$ for all $z \in \mathcal{K}_\ell$. Set $I(z) = \{y \in \mathcal{N}_\ell | \zeta(y) = z\}$, $\Psi_z = \sum_{y \in I(z)} \varphi_y$, $\Omega_z = \{\varphi_z > 0\} \supseteq \omega_z$ for all $z \in \mathcal{K}_\ell$.



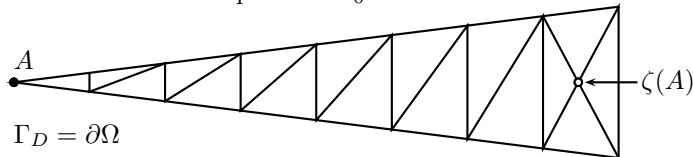
Moreover,

1. Ω_z is connected, open and interior of $\bigcup \mathcal{T}(\Omega_z)$.
2. $1 \leq \text{Card}(I(z)) = \#I(z) \approx 1$ for $z \in \mathcal{K}_\ell$ and shape regular triangulation. Hence, $|\mathcal{T}(\Omega_z)| \approx 1$.
3. $\sum_{z \in \mathcal{K}_\ell} \Psi_z = 1$ in Ω
4. If $z \in \mathcal{K}_\ell$ satisfies $\varphi_z \neq \Psi_z$ then $\Omega_z := \bigcup_{y \in I(z)} \omega_z$ has at least one edge $E \in \mathcal{E}$ on $\partial\Omega_z \cap \Gamma_D$.

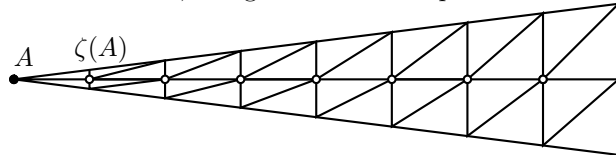
Given $v \in V = H_D^1(\Omega)$ define $J_\ell v \in V_\ell := P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap V$ via $(J_\ell v)(z) := \frac{\int_\Omega V \varphi_z dx}{\int_\Omega \Psi_z dx}$ for $z \in \mathcal{K} = \mathcal{N} \setminus \Gamma_D$ and $v_z \in P_1(\omega_z)$ with $\|v - v_z\|_{L^2(\omega_z)} = \min_{w_z \in P_1(\omega_z)} \|v - w_z\|_{L^2(\omega_z)}$.

Bemerkung

The technical condition that $\forall T \in \mathcal{T} : \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{K}_\ell \neq \emptyset$ can be dropped, but then the constants in the approximation & stability estimates below shall depend in some complicated form on \mathcal{T}_ℓ . Those constants depend on \mathcal{T}_0 but not on mesh-sizes.



Excluded here, but generalisation is possible.



Refine \mathcal{T}_0 as shown here or apply $\text{bisecs}(\mathcal{T}_0)$

Scott-Zang-Approximation-Operator

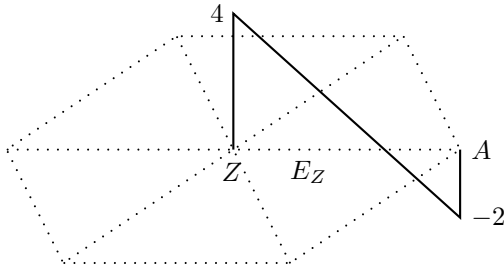
(Prethinking about 2D and edge E which is an affine image of unit interval $[0, 1]$).

Consider $\Psi(z) = \alpha + \beta x$ for $0 < x < 1$ and parameters $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ with $\int_0^1 \Psi(x) dx = 1$ & $\int_0^1 \psi(x)x dx = 0$.

Hence, $\alpha + \frac{\beta}{2} = 1$ and $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{3} = 0$, i.e. $\alpha = 4$ and $\beta = -6$.

$\Rightarrow \Psi(x) = 4 - 6x$

Given $z \in \mathcal{K}_\ell$ choose edge $E_z \in \mathcal{E}_\ell(z) = \{F \in \mathcal{E}_\ell | z \in \mathcal{N}(F)\}$ and define $\psi_z(x) = 4 - 6\frac{|z-x|}{|E|}$.



For $v \in V$, $z \in \mathcal{K}_\ell$, $(J_\ell v)(u) := \int_{E_z} \Psi_z(x)v(x)ds_x$.

(NB $J_\ell v_\ell = v_\ell$ for all $v_\ell \in V_\ell$.)

L^2 -Projection

Given $v \in V$ let $J_\ell v$ be defined in V_ℓ by

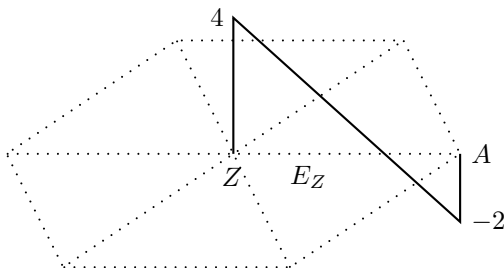
$$\|v - v_\ell\|_{L^2(\Omega)} = \min_{w_\ell \in V_\ell} \|v - w_\ell\|_{L^2(\Omega)}$$

This L^2 -Projection is global but a second-order projection and H^1 stable for adaptive meshes in 2D under mild refinement conditions

Local L^2 -Projection

Given $v \in V$, $z \in \mathcal{K}_\ell$, $\mathcal{T}(z) := \{T \in \mathcal{T}_\ell | z \in \mathcal{N}(T)\}$ define

$$V_\ell|_{\omega_z} := \{w_z \in C(\bar{\omega}_z) \cap P_1(\mathcal{T}_\ell(z)) | w_z = 0 \Gamma - \text{a.e. along } \Gamma_D \cap \partial\omega_z\} = \{v_\ell|_{\omega_z} | v_\ell \in V_\ell\}$$



Generalisations

Special approximation properties may require a particular design of $J_\ell v$. Known examples include averaging over subdomains e.g. $(J_\ell v)(z) = \int_{B_\delta(z)} v(x) dx$ over ball $B_\delta(z)$ around x with maximal radius δ s.t. $B_\delta(z) \subseteq \omega_z$. But difficulties for convex corners.

TODO

2 Bilder

Approximation & Stability Analysis

On $J_\ell : V \rightarrow V_\ell$.

Locality: $\forall z \in \mathcal{K}_\ell \exists c_z > 0 : \exists \Omega_z \subseteq \Omega$ open and connected, $\omega_z \subseteq \Omega_z$.

$$\forall v \in V = H_D^1(\Omega) : \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell(z)} h_T^{-2} \|v - (Jv)(z)\|_{L^2(T)}^2 \leq c_z \|Dv\|_{L^2(\Omega_z)}^2 \quad (A)$$

(recal $\mathcal{T}_\ell(z) = \{k \in \mathcal{T}_\ell | z \in \mathcal{N}(k)\}$)

Bemerkung

(A) holds for all examples above (except global L^2 -Projection) for $\Omega_z = \omega_z$.

Proof for Oswald

Poincaré inequality:

$$\|v - (Jv)(z)\|_{L^2(\omega_z)} \lesssim \text{diam}(\omega_z) \|Dz\|_{L^2(\omega_z)}$$

Since $\text{diam}(\omega_z) \approx h_T$ for all $T \in \mathcal{T}_\ell(z)$. □

Bemerkung

For $z \in \mathcal{N} \cap \Gamma_D : \exists c_1 : 0 : \forall v \in V$

$$(B) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} (z) h_T \|v\|_{L^2(T)}^2 \leq c_z \|Dv\|_{L^2(\omega_z)}$$

By Friedrich's inequality

$$\|v\|_{L^2(\omega_z)} \lesssim \|Dv\|_{L^2(\omega_z)}$$

for $v \in H'(\omega_z)$ with $v|_{\Gamma_D \cap \partial \omega_z} = 0$.

Vorlesung am 21.01.2009

Satz 9.6. (Approximation & stability property) *Under the preceding assumptions and*

$$\Omega_T := \bigcup_{z \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{K}_\ell} \Omega_z \text{ for } T \in \mathcal{T}_\ell$$

it holds for all $v \in v$:

$$h_T^{-1} \|v - Jv\|_{L^2(T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}(T)} h_E^{-\frac{1}{2}} \|v - Jv\|_{L^2(E)} + |Jv|_{H^1(T)} \lesssim |v|_{H^1(\Omega_T)}$$

Bemerkung

1. For $w \in H^1(T), E \in \mathcal{E}(T)$ holds

$$H_E^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(E)} \lesssim \|w\|_{L^2(T)} h_t^{-1} + |w|_{H^1(T)}$$

2. Because of finite overlapp of $(\Omega_T | T \in \mathcal{T}_\ell)$,

$$\|h_\ell^{-1}(v - Jv)\| + \|v - Jv\| + \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_E^{-1} \|v - Jv\|_{L^2(E)}^2} \lesssim \|v\|$$

for $v \in V$.

Proof of approximation property

$$(Jv)(z) := 0 \text{ for } z \in \mathcal{N}(\Gamma_D)$$

$$1 = \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \varphi_z$$

implies

$$0 = \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} D\varphi_z$$

$$v - Jv = \sum_{z \in \mathcal{N}(T)} (v - (Jv)(z))\varphi_z \text{ on } T \in \mathcal{T}_\ell$$

$$-DJv = \sum_{z \in \mathcal{N}(T)} (v - Jv(z))D\varphi_z$$

$$\Rightarrow h_T^{-1} \|v - Jv\|_{L^2(T)} + |Jv|_{H^1(T)} \lesssim \sum_{z \in \mathcal{N}(T)} \underbrace{\left(h_T^{-1} \underbrace{\|(v - (Jv)(z)) \varphi_z\|_{L^2(T)}}_{0 \leq \cdot \leq 1} + \underbrace{\|(v - (Jv)(z)) D\varphi_z\|_{L^2(T)}}_{\approx h_T^{-1}} \right)}_{\substack{\lesssim h_T^{-1} \|v - (Jv)(z)\|_{L^2(T)} \quad \text{(A) for } z \in \mathcal{K}_\ell, \text{(B) for } z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \mathcal{K}_\ell \\ \leq c_z^{\frac{1}{2}} |v|_{H^1(\Omega_z)}}}$$

$$\lesssim |v|_{H^1(\Omega_T)}$$

Bemerkung

Some operators (like Scott-Zhang, symmetric Midpoints, L^2 -Projection) are of second order in the sense that

$$h_T^{-2} \|v - Jv\|_{L^2(T)} + h_T^{-1} |v - Jv|_{H^1(T)} \lesssim |v|_{H^2(\Omega_T)}$$

Satz 9.7. (Orthogonality property of weighted approximation operator) Let be $f \in L^2(\Omega)$, $g \in V = H_D^1(\Omega)$ and

$$\left| \int_{\Omega} f(g - Jg) dx \right| \lesssim \text{osc}(f, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell^2\}) \cdot |g|_{H^1(\Omega)}$$

Then, there holds

$$\text{osc}(f, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\})^2 = \sum_{z \in \mathcal{K}_\ell} \text{osc}(f, \Omega_z)^2, \text{osc}(f, w) = \text{diam}(w) \|f - f_w\|_{L^2(\Omega)}$$

for $f \in L^2(w)$ with $f_w = \int_{\omega} f(x) dx$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} f \sum_{z \in \mathcal{K}_{\ell}} (\Psi_z g - (Jg)(z) \varphi_z) dx &= \sum_{z \in \mathcal{K}_{\ell}} \int_{\Omega_z} (f - f_{\Omega_z}) (\Psi_z g - (Jg)(z) \varphi_z) dx \\
 &\quad \text{since } \int_{\Omega} \left(\Psi_z g - \frac{\int \Psi_z g dx}{\int \varphi_z} \varphi_z \right) dx = 0 \\
 &\leq \sum_{z \in \mathcal{K}_{\ell}} \underbrace{\|f - f_{\Omega_z}\|_{L^2(\Omega_z)}}_{=: \text{osc}(f, \Omega_z) h_z^{-1}} \underbrace{\|g \Psi_z - (Jg)(z) \varphi_z\|_{L^2(\Omega_z)}}_{(1)} \\
 &\lesssim \underbrace{\text{osc}(f, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_{\ell}\})}_{=: \text{osc}(f, \mathcal{K}_{\ell})} \|g\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Case 1: } \varphi_z \equiv \Psi_z \leq 1: (1) &\leq \|g - (Jg)(z)\|_{L^2(\Omega_z)} \stackrel{(A)}{\lesssim} h_t |g|_{H^1(\Omega_z)} \\
 \text{Case 2: } \varphi_z \neq \Psi_z: (1) &\leq \underbrace{\|g(\psi_z - \varphi_z)\|_{L^2(\Omega_z)}}_{\leq \sum_{\substack{y \in \mathcal{N}_{\ell}(\Gamma_D) \\ \zeta(y)=z}} \|g\|_{L^2(\omega_y)}} + \|g - (Jg)(z)\|_{L^2(\Omega_z)} \\
 &\stackrel{(B)}{\lesssim} h_{\mathcal{T}} |g|_{H^1(\omega_y)}
 \end{aligned}$$

□

Satz 9.8. (Reliability of $\eta_{\ell} :=$ explicit residual-based error estimator)

$$\|R\|_{V^*} \lesssim \eta_{\ell}(\mathcal{E}_{\ell} \cup \mathcal{T}_{\ell}) := \sqrt{\eta_{\ell}(\mathcal{E}_{\ell})^2 + \eta_{\ell}(\mathcal{T}_{\ell})^2} =: \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell}} \eta_{\ell}^2(E) + \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell}} \eta_{\ell}^2(T)}$$

where $R_T \in L^2(T)$ for all $T \in \mathcal{T}_{\ell}$ and $R_E \in L^2(E)$ for all $E \in \mathcal{E}_{\ell} :=$ set of edges/faces inside Ω or on $\bar{\Gamma}_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$.

$$R(v) := \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell}} \int_T R_T v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell}} \int_E R_E v ds$$

for $v \in V = H_D^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned}
 \eta_{\ell}(E) &:= h_E^{\frac{1}{2}} \|R_E\|_{L^2(E)} \text{ for } E \in \mathcal{E}_{\ell} \\
 \eta_{\ell}(T) &:= h_T \|R_T\|_{L^2(T)} \text{ for } T \in \mathcal{T}_{\ell}
 \end{aligned}$$

Provided $V_{\ell} \subseteq \ker R_{\ell}$.


Beweis:

For $v \in V$ and $w = v - Jv$ with some approximation operator J . Then,

$$\begin{aligned}
 |R(v)| &= |R(w)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \underbrace{\left| \int_T R_T v \, dx \right|}_{\leq \|h_T R_T\|_{L^2(T)} \|w\|_{L^2(T)} h_T^{-1}} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \underbrace{\left| \int_E R_E v \, ds \right|}_{\leq \eta_\ell(E) h_E^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(E)}} \\
 &\leq \underbrace{\eta_\ell(\mathcal{T}_\ell) \|h_\ell^{-1}(v - Jv)\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|v\|} + \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell) \underbrace{\left(\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_E^{-1} \|v - Jv\|_{L^2(E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\lesssim \|v\|} \\
 &\leq \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell \cup \mathcal{E}_\ell) \|v\|
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung

P_1 -FEM based on triangulation with right isosceles triangles  with interior angle $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$ of the 2D polygonal domain Ω .

Then for the Poisson model problem holds

$$\|e\| \leq \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell) + \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell) \text{ with constant } \leq 1$$

(C-Funken '99, computer-based proof)

In practise, this implies overestimation often by a factor 10.

Satz 9.9. (Reliability of $\eta_\ell(\mathcal{E}_\ell) - \text{osc}_\ell$)

$$\|R_\ell\|_{V^*} \lesssim \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell) + \text{osc}(R_\mathcal{T}, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\})$$

for $R_\mathcal{T} \in L^2(\Omega)$ defined by $R_\mathcal{T}|_T := R_T$ on $T \in \mathcal{T}_\ell$.

Bemerkung

For P_1 -FEM in Poisson model problem, $R_\mathcal{T} = f - \underbrace{\Delta_\ell u_\ell}_{=0}$ may be smooth and so

$$\text{osc}_\ell \lesssim \|h_\ell^1 \nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

(by Poincaré inequality)

Proof 1 - By R. Roudriguez '94

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega_z} R_{\mathcal{T}_\ell} \varphi_z dx \right| &= \left| \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T R_T \varphi_z dx \right| = \left| \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \int_E R_E \varphi_z ds \right| \\ &\leq \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_\ell \\ z \in E}} \|\varphi_z\|_{L^2(E)} \|R_E\|_{L^2(E)} \leq \sum_{z \in E \in \mathcal{E}_\ell} \underbrace{h_E^{-\frac{1}{2}} |E|^{\frac{1}{2}}}_{=1} \cdot \eta_\ell(E) = \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell(z)) \\ \mathcal{E}_\ell(z) &:= \{E \in \mathcal{E}_\ell | z \in \mathcal{N}(E)\} \\ \bar{R} &:= \int_{\Omega_z} R_{\mathcal{T}_\ell}(x) dx \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \bar{R} \varphi_z dx \right| &\leq \underbrace{\left| \int_{\Omega_z} \varphi_z (\bar{R} - R_{\mathcal{T}_\ell}) dx \right|}_{\leq \|\varphi_z\|_{L^2(\Omega_z)} \|\bar{R} - R_{\mathcal{T}_\ell}\|_{L^2(\Omega_z)} \approx \text{osc}(R_{\mathcal{T}_\ell}, \Omega_z)} + \underbrace{\left| \int_{\Omega_z} \varphi_z R_{\mathcal{T}_z} dx \right|}_{\lesssim \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell(z))} \\ \|h_\ell R_{\mathcal{T}_\ell}\|_{L^2(\Omega_z)}^2 &= \underbrace{h_{\omega_z}^2 \|R_{\mathcal{T}_\ell} - \bar{R}\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\approx \text{osc}(R_{\mathcal{T}_\ell}, \Omega_z)^2} + \underbrace{\|\bar{R}\|_{L^2(\Omega_z)}^2}_{\approx |\int_{\Omega} \bar{R} \varphi_z dx| \lesssim \text{osc}(R_{\mathcal{T}_\ell}, \Omega_z) + \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell(z))} \end{aligned}$$

Hence volume contribution in previous reliability result \lesssim osc plus side contributions.

Proof 2 with weighted approximation operator

With arguments of previous reliability proofs,

$$R(v) = R(w) = \underbrace{\int_{\Omega} R_{\mathcal{T}_\ell}(v - Jv) ds}_{\lesssim \text{osc}(R_{\mathcal{T}_\ell}, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\}) \|v\|} + \dots$$

orthogonality property

□

Bemerkung

$$\|R\|_{V^*} \lesssim \|R\|_{V_{\ell+1}^*} + \text{osc}(R_{\mathcal{T}_\ell}, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\}) + \text{osc}(R_{\mathcal{E}_\ell} | \mathcal{E}_\ell)$$

follows from reliability of η_ℓ plus equivalence to μ_ℓ .

Vorlesung am 26.01.2009

9.4 Averaging A Posteriori Error Estimator

History: Zienkiewicz-Zhu:

Gradient recovery

Given $p_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^n)$ compute $Ap_\ell \in P_1(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^n) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ via $(Ap_\ell)(z) = \int_{\omega_z} p_\ell(x) dx$ for node $z \in \mathcal{N}_\ell$ with patch ω_z similar to Oswald approximation.

TODO

Bild

Then define

$$\eta_A := \|p_\ell - Ap_\ell\|_{L^2(\Omega)} \geq \min_{q_\ell \in Q_\ell} \|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)} =: \eta_M$$

Here, P_ℓ is flux (not gradient) or stress (not strain). Justification by numerical experiments only or via superconvergence (for very smooth solutions far away from boundary and very special meshes).
Let

$$R(v) := \int_{\Omega} f v \, dx - \int_{\Omega} p_\ell \cdot Dv \, dx + \int_{\Gamma_N} g v \, ds, \quad v \in V = H_D^1(\Omega)$$

for data $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma_N)$, $p_\ell \in P_k(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^n)$, \mathcal{T}_ℓ shape regular triangulation of Ω .

$V_\ell := P_\ell(\mathcal{T}_\ell) \cap V \subseteq \ker R$, $\Omega_z := \{\psi_z > 0\}$, from weighted approximation operator

Satz 9.10. (All averaging is reliable) For $q \in H(\operatorname{div}, \Omega) \cap P_k(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^n)$ it holds

$$\|R\|_{V^*} \lesssim \|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)} + \operatorname{osc}(f - \operatorname{div}_\ell p_\ell, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\}) + \left\| h_{\mathcal{E}_\ell}^{-\frac{1}{2}} (g - q_\ell \cdot \nu) \right\|_{L^2(\Gamma_N)}$$

Beweis:

For $v \in V$ und $v_\ell := J_\ell v \in V_\ell$ with first-order approximation stability and orthogonality property

$$\begin{aligned} R(v) &= R(\underbrace{v - v_\ell}_{=: w}) \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} (f + \operatorname{div}_\ell p_\ell) w \, dx + \int_{\Gamma_N} (q_\ell - p_\ell \cdot Dw) \, dx}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Omega} (q_\ell - p_\ell) \cdot Dw \, dx}_{(2)} - \underbrace{\int_{\Omega} q_\ell \cdot Dw \, dx}_{(3)} - \int_{\Omega} \operatorname{div}_\ell p_\ell v w \, dx + \int_{\Gamma_N} (q_\ell \cdot \nu) w \, ds \\ (1) &= \int_{\Omega} (f + \operatorname{div}_\ell p_\ell)(v - j_\ell v) \, dx \lesssim \operatorname{osc}(f + \operatorname{div}_\ell p_\ell, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\}) \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + \int_{\Gamma_N} (g - q_\ell \cdot \nu)(v - J_\ell v) \, ds + \left\| h_{\mathcal{E}_\ell}^{-\frac{1}{2}} (g - q_\ell \cdot \nu) \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \underbrace{\left\| h_{\mathcal{E}_\ell}^{-\frac{1}{2}} (v - J_\ell v) \right\|_{L^2(\Gamma_N)}}_{\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \end{aligned}$$

Trace Inequality for $E \in \mathcal{E}_\ell(T)$, $E \subseteq \bar{\Gamma}_N$:

$$\begin{aligned} h_E^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2(E)} &\lesssim \underbrace{\|\nabla w\|_{L^2(T)}}_{\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_T)}} + \underbrace{h_T^{-1} \|w\|_{L^2(T)}}_{\substack{\text{from approximation property} \\ \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_T)}}} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_T)} \\ (2) &\leq \underbrace{\|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{Stability}} \underbrace{\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \\ (3) &= \int_{\Omega} w \operatorname{div}_\ell (q_\ell - p_\ell) \, dx \leq \underbrace{\|h_\ell \operatorname{div}_\ell (q_\ell - p_\ell)\|_{L^2(\Omega)}}_{\substack{\in P_k(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^n) \\ \lesssim \|q_\ell - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}}} \underbrace{\|h_\ell^{-1} w\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|v\|_{H^1(\Omega)}} \end{aligned}$$

Inverse Inequality on T :

$$\forall s \in P_k(T) : \underbrace{\|\nabla s\|_{L^2(T)}}_{LHS(s)} \lesssim \underbrace{h_T^{-1} \|s\|_{L^2(T)}}_{RHS(s)}$$

(Proof)

1. $T = T_{ref}$, $LHS(s)$ & $RHS(s)$ define seminorms on $P_k(T_{ref})$ and:

$$RHS(s) = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow LHS(s) = 0$$

Hence, as in equivalence of norms in finite dimensional vector spaces, it follows $LHS \lesssim RHS$.

2. Transformation formula for $T_{ref} \rightarrow T$ yields factor h_T .

Hence

$$\forall s \in P_k(T; \mathbb{R}^n) : \|\operatorname{div} s\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|s\|_{L^2(T)}$$

□

Bemerkungen (Poisson Model Problem)

1. $Q_\ell = RT_0(\mathcal{T}_\ell)$, $\Gamma_N \neq \emptyset$, P_ℓ -FEM with solution $u_\ell \in V_\ell$ and $p_\ell := \nabla u_\ell$ yields

$$\|R\|_{V^*} \lesssim \min_{y_\ell \in RT_0(\mathcal{T}_\ell)} \|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)} + \underbrace{\operatorname{OSC}_\ell}_{=\operatorname{osc}(f, \{\Omega_z | z \in \mathcal{K}_\ell\})}$$

or

$$Q_\ell = P_1(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n), \quad \|R\|_{V^*} \lesssim \eta_M + \operatorname{OSC}_\ell$$

2. $\eta_M \leq \eta_A \leq \begin{cases} \sqrt{10}\eta_M & \text{in } 2D \\ \sqrt{15}\eta_M & \text{in } 3D \end{cases}$ for any $p_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^n)$.

$$\eta_M \approx \eta_A \approx \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell) := \sqrt{\sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} h_E \|[p_\ell]_E \cdot \nu_E\|_{L^2(E)}^2}$$

And this implies $\eta_A \lesssim \eta_\ell$ which is efficient!

3. Direct efficiency proof for smooth solutions:

For all $q_\ell \in Q_\ell \in P_q(\mathcal{T}_\ell, \mathbb{R}^n) \cap C(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{O}(h_\ell) \lesssim \eta_M \leq \underbrace{\|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{O}(h_\ell)} \leq \underbrace{\|p_\ell - p\|_{L^2(\Omega)}}_{\mathcal{O}(h_\ell)} \underbrace{\|p - q_\ell\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|h_\ell^2 D^2 p\|_{L^2(\Omega)} =: \mathcal{O}(h_\ell^2)}$$

p smooth, $q_\ell := I_\ell p$ nodal interpolation in Q_ℓ

This justifies

$$\eta_M \leq \|p - p_\ell\| + h.o.t.$$

Numerical evidence shows that η_A is a better approximation for $\|p - p_\ell\|$ than η_M .

4. Relation to discrete hyper-cycle method

$$\begin{aligned} \eta_M &:= \min_{q_\ell \in RT_0(\mathcal{T}_\ell)} \|p_\ell - q_\ell\|_{L^2(\Omega)} \text{ for } p_\ell := \nabla u_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^n) \text{ from } P_1\text{-FEM} \\ &\stackrel{?}{=} \|p_\ell - p_{RT}\|_{L^2(\Omega)} \text{ for } p_{RT} \text{ } RT_0\text{-MFEM solution} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \underbrace{(p - p_\ell)}_{\nabla u - \nabla v} \underbrace{(p - p_{RT})}_{\in H(\text{div}, \Omega)} dx = - \int_{\Omega} (u - u_\ell) \text{div}(p - p_{RT}) dx$$

for $f_\ell \in P_0(\mathcal{T}_\ell)$ piecewise integral mean, i.e., $\forall T \in \mathcal{T}_\ell : f_\ell|_T = \int_T f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\Omega} (p - p_\ell)(p - p_{RT}) dx &= \int_{\Omega} \underbrace{((u - u_\ell - \bar{w}))}_{=:w} (f - f_\ell) dx \text{ for all } \bar{w} \in P_0(\mathcal{T}_\ell) \\ &\leq \underbrace{\|h_\ell^{-1}(w - \bar{w})\|_{L^2(w)}}_{\leq \frac{1}{\pi} \|p - p_\ell\|_{L^2(\Omega)} \text{ if element domains convex}} \cdot \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell) \end{aligned}$$

Hence $\delta_c := p - p_\ell$ and $\delta_{RT} = p - p_{RT}$ satisfy strengthened Cauchy inequality

$$\left| \int_{\Omega} \delta_c \cdot \delta_{RT} dx \right| \leq \frac{1}{\pi} \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell) \|\delta_c\| \ll \|\delta_c\| \|\delta_{RT}\|$$

Perturbed Pythagoras:

$$2 \frac{\text{osc}_\ell}{\pi} \geq 2 \left| \int_{\Omega} \delta_c \delta_{RT} dx \right| = \left| \underbrace{\|\delta_c - \delta_{RT}\|^2}_{=\|p_\ell - p_{RT}\|^2 = \text{Estimator}} - \|\delta_c\|^2 - \|\delta_{RT}\|^2 \right|$$

Hence:

$$\|\delta_c\|^2 + \|\delta_{RT}\|^2 = \|p_\ell - p_{RT}\|^2 \pm \frac{2}{\pi} \text{osc}_\ell \|\delta_c\|$$

Thus

$$\|p_\ell - p_{RT}\|^2 + \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)^2$$

is computable error estimator for $\|p - p_\ell\| + \|p - p_{RT}\|$.

9.5 Implicit A Posteriori Error Control

Motivation for implicit error estimators

Explicit Estimators e.g. η_ℓ are not fine enough: Typically $\|e\| \approx \frac{1}{12}\eta_\ell$ although one can only prove $\|e\| \leq \eta_\ell$ for structured meshes. Termination after guaranteed $\|e\| \leq tol$ via $\eta_\ell \leq tol$, so overestimation in typical examples yields $\|e\| \frac{tol}{12}$ and so over-refinement by factor $16 = 2^4$ and 4 levels of refinements yield extra costs of factor 2^4 more on degrees of freedom and so used CPU time ≥ 16 necessary CPU time. An implicit estimator with much more extra costs, say m CPU, which terminates at level $\|e\| \leq tol$ costs in total $CPU(1 + m)$. This is better than explicit estimation for $m \leq 15$. Hence, implicit error control may be much more expensive than explicit estimation but the overall consequences are cheaper.

Elementwise localisation by flux equilibration for Poisson model Problem

1. For $T \in \mathcal{T}_\ell, \Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega, V = H_D^1(\Omega)$,

$$V_T = \begin{cases} H'(T)/\mathbb{R} & \text{if } |\Gamma_D \cap (\partial T)| = 0 \\ H_D^1(T) := \{v \in H^1(T) | v|_{(\partial T) \cap \Gamma_D}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Local Test spaces

References: Hinsworth-Oden

2. Fluxes on sides/edges: Given $(g_T | T \in \mathcal{T}_\ell), g_T \in L^2(\partial T)$

due to Ladevèze

Satisfy

$$\forall T \in \mathcal{T}_\ell, V_T = H^1(T)/\mathbb{R} : 0 = R_T(1) = \int_T r_T dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} R_\mathcal{E} ds + \int_{\partial T} g_T ds$$

along all interior edges $E: g_{T_+}|_E + g_{T_-}|_E = 0$

along $E \subseteq \Gamma_D$: no condition

along $E \subseteq \bar{\Gamma}_N \cap \partial T: R_E = -2g_T|_E$

3. Local Problems

Seek $e_T \in V_T$ such that $a_T(e_T, \cdot) = R_T$ in V_T where $a_T(u, v) := \int_T Du \cdot Dv dx$

& $R_T(v) := \int_T R_T v dx + \int_{\cup \mathcal{E}} R_\mathcal{E} v ds + \int_{\partial T} g_T v ds$

($R_T, R_\mathcal{E}$ from residual representation formula, g_T is an extra flux variable)

4. Equilibrated Error Estimator

$$\eta_{E_q} := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|e_T\|_T^2}$$

for solution e_T of local problem on $T \in \mathcal{T}_\ell$ and $\|\cdot\|_T = a_T(\cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$

5. Mathematical Justification of $\|R_\ell\|_* \leq \eta_{E_q}$

Local problems hav unique solution e_T iff $R_T(1) = 0$ for all $V_T = H^1(T)/\mathbb{R}$

(if not, define $\eta_{E_q} := \infty$)

For $v \in V = H_D^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
 R_\ell(v) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \underbrace{\int_T R_T v \, dx}_{a(e_T, v)} \\
 &= \underbrace{a(e_T, v)}_{\leq \|e_T\| \|v\|} - \frac{1}{2} \int_{\partial T} R_\varepsilon v \, ds - \int_{\partial T} g_T v \, ds \\
 &\leq \eta_{E_q} \|v\| + \sum_{E \text{ all inside}} \int_E (R_E - R_{\frac{\varepsilon}{2}}) \underbrace{-R_{\frac{\varepsilon}{2}}}_{\text{if } E \text{ interior side}} - g_{T_+} \underbrace{-g_{T_-}}_{\text{if } E \text{ interior side}} v \, ds \\
 &E = \partial T_+ \cap \partial T_-
 \end{aligned}$$

Satz 9.11. (Ladevèze) Under equilibrium conditions on the fluxes, $\eta_{E_q} < \infty$ and $\|R\|_* \leq \eta_{E_q}$ with multiplicative constant 1.

6. Design of equilibrated fluxes

Ansatz for $g_{T_\pm}|_E := g_E =: g_{T_-}|_E$ for $E \in \mathcal{E}_\ell^{interior}$, $\partial T_+ \cap \partial T_- = E$, $T_\pm \in \mathcal{T}_\ell$
 as $g_E = \alpha_{E,a} \psi_{E,a} + \beta_{E,b} \psi_{E,b}$ for $E = \text{conv}\{a, b\}$ with $a, b \in \mathcal{N}_\ell$ in $2D$
 with $\psi_{E,b} := 2\varphi_b - \varphi_a$, $\psi_{E,a} := 2\varphi_a - \varphi_b$

TODO

Bild

$R_T(\varphi_z) = 0$ for all $T \in \mathcal{T}_\ell, z \in \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}_\ell$ (and then $R_T(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) = R(1) = 0$ in the case of $\mathcal{N}(T) = \{a, b, c\}$). This yields to a linear system of equations for unknown $\alpha_{2,E} \in \mathbb{R}$ for each patch with node z and all $E \in \mathcal{E}(Z)$.

For free node $Z : 0 = R(\varphi_z)$ and $0 = R_T(\varphi_z) = \int_T R_T \varphi_z \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial T} R_\varepsilon \varphi_z \, ds + \int_{\partial T} g_T \varphi_z \, ds$ for all $T \in \mathcal{T}(z) := \{K \in \mathcal{T}_\ell | z \in \mathcal{N}(K)\}$

with unknowns in $\int_E \underbrace{g_E}_{\alpha_{E,z} \psi_{E,z} + \underbrace{\psi_{E,b}}_{\text{perpendicular to } \varphi_z}} \varphi_z \, ds =$.

for $E \in \mathcal{E}_\ell(z)$.

This orthogonality $\int_E \psi_{E,z} \varphi_y \, ds = 0$ for $\mathcal{N}(E) = \{z, y\}$ yields patchwise linear systems of equations which are solved in $\mathcal{O}(1)$ effort.

Bemerkung

Computation of e_T has to be performed in very high accuracy!

Vorlesung am 02.02.2009

9.5.1 Localisation via partition of unity a posteriori error control

C-Funken SISC (2000) 1465-1484

Residual representation formula

$$R(V) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \int_T R_T v \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} \int_E R_E v \, ds$$

based on some shape-regular triangulation \mathcal{T}_ℓ of Ω into simplices (e.g. triangles etc.) and associated nodal basis functions $\{\varphi_z | z \in \mathcal{N}_\ell\}$ with respect to all nodes \mathcal{N}_ℓ which form a partition of unity, i.e. $\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \varphi_z = 1$ in Ω .

N.B. $R(\varphi_z) = 0$ for all $z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \Gamma_D$ and

$$H_D^1(\omega_z) := \{w \in H^1(\omega_z) | w = 0 \text{ along } \Gamma_D \cap \partial\omega_z\}$$

with $|\Gamma_D \cap \partial\omega_z| > 0$ for $z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \mathcal{K}_\ell$ (at least on side E with vertex z belongs to Γ_D).

Definition

$$R_z \in V_z := \begin{cases} H^1(\omega_z)/\mathbb{R} & \text{for } z \in \mathcal{K}_\ell \\ H_D^1(\omega_z) & \text{for } z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \mathcal{K}_\ell \end{cases}$$

by $R_z(w) := R(\underbrace{\varphi_z w}_{\in V = H_D^1(\Omega)})$ for all $w \in V_z$.

$$a_z(v, w) := \int_{\Omega} \varphi_z Dv \cdot Dw \, dx$$

Scalar Product on V_z with norm

$$\|\cdot\|_z := (a_z(\cdot, \cdot))^{\frac{1}{2}} \lesssim |\cdot|_{H^1(\omega_z)}$$

(but not equivalent).

Bemerkungen

1. Completion of (V_z, a_z) results in Hilbert space

$$W_z = \begin{cases} \left\{ v \in H_{loc}^1(\omega_z)/\mathbb{R} \mid \|\varphi_z^{\frac{1}{2}} Dv\|_{L^2(\omega_z)} < \infty \right\} & \text{for } z \in \mathcal{K}_\ell \\ \left\{ v \in H_{loc}^1(\omega_z) \mid \|\varphi_z^{\frac{1}{2}} Dv\|_{L^2(\omega_z)} < \infty \quad \wedge \quad v = 0 \text{ along } \Gamma_D \cap (\partial\omega_z) \right\} & \text{for } z \in \mathcal{H}_\ell \setminus \mathcal{K}_\ell \end{cases}$$

with extended scalar product a_z and norm $\|\cdot\|_z$.

2. V_z is dense in W_z and R_z is uniquely extended to W_z^* . It's important to see that $R_z(1) = 0$ for $z \in \mathcal{K}_\ell$ and so $R_z \in W_z^*$.

Definition

$$\eta_z := \|R_z\|_{W_z^*}$$

$$\eta_\ell := \sqrt{\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z^2}$$

Satz 9.12. 1. *Feasibility:*

$\eta_z = \|R_z\|_{W_z^*} = \|e_z\|_z < \infty$ for Riesz representation e_z of $R_z \in W_z^*$ w.r.t. a_z .

2. *Reliability:*

$$\|R\|_* := \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{R(v)}{\|Dv\|_{L^2(\Omega)}} \leq \eta_L$$

3. Efficiency:

$$\eta_z^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} (z) \eta_\ell^2(T) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell} (z) \eta_\ell(E)^2 \text{ for all } z \in \mathcal{N}_\ell$$

4. 2D, \mathcal{T}_ℓ right isosceles triangles



TODO

Abbildung VLoXXVIIa

then $\|R\|_* \leq \eta_\ell \leq 2.38 \|R\|_*$.

Beweis:

1. $R_z(e_z) = a_z(e_z, e_z) = \|e_z\|_z^2$
 $\Rightarrow \|R_z\|_{W_z^*} \geq \frac{R_z(e_z)}{\|e_z\|_z} = \|e_z\|_z$
 $|R_z(v)| = |a_z(e_z, v)| \leq \|e_z\|_z \cdot \|v\|$
 $\Rightarrow \|R_z\|_{W_z^*} \leq \|e_z\|_z$
2. $R(v) = \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} R(\varphi_z v)$ with

$$\begin{aligned} \varphi_z v &= R_z v|_{\omega_z} = R_z(V + \mathbb{R}|_{\omega_z}) \text{ if } z \in \mathcal{K}_\ell, \text{ since } R_z(1) = 0 \\ &\leq \|R_z\|_{W_z^*} \|v + \mathbb{R}\|_z = \|R_z\|_{W_z^*} \|v\| + \|z\| \\ \Rightarrow R(v) &\leq \left(\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \|v\|_z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta_\ell \left(\int_{\Omega} \underbrace{\left(\sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \varphi_z \right)}_{=1} |Dv|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \eta_\ell \|Dv\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

3. Proof relies on weighted Poincaré inequality: For $f \in H_{loc}^1(\omega_z)$,

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \int_{\omega_z} \varphi_z (f - a)^2 dx \lesssim \text{diam}(\omega_z)^2 \|f\|_z$$

Idea of quick proof: $\hat{\omega}_z \subseteq \omega_z \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ defined as

$$\hat{\omega}_z = \{(x, y) \in \omega_z \times \mathbb{R} \mid 0 < y < \varphi_z(x)\}$$

with Poincaré inequality:

$F \in H^1(\hat{\omega}_z)$ with $\int_{\hat{\omega}_z} F d\hat{\omega}_z = 0$ implies $\|F\|_{L^2(\hat{\omega}_z)} \leq c_p(\hat{\omega}_z) \|DF\|_{L^2(\hat{\omega}_z)}$

Choose $F(x, y) := f(x) - a$ for $(x, y) \in \hat{\omega}_z$ and $a = \frac{\int_{\omega_z} \varphi_z f dx}{\int_{\omega_z} \varphi_z dx}$.

$$\text{N.B. } \int_{\hat{\omega}_z} F(x, y) d\hat{\omega}_z = \int_{\omega_z} \underbrace{\int_0^{\varphi_z(x)} (f(x) - 0) dy}_{= \varphi_z(x)(f(x) - a)} dx = \int_{\omega_z} \varphi_z f dx - a \int_{\Omega} \varphi_z dx = 0$$

Hence

$$\int_{\omega_z} \varphi_z (f - a)^2 dx = \|F\|_{L^2(\hat{\omega}_z)}^2 \leq c_P(\hat{\omega}_z) \underbrace{\int_{\hat{\omega}_z} |(D_x f(x)|0)|^2 d\hat{\omega}_z}_{= \int_{\omega_z} \varphi_z |Df|^2 dx}$$

Scaling argument shows that the constant depends on $\text{diam}(\omega_z)$ and shape of ω_z .

$$\begin{aligned} \eta_z^2 &= R_z(e_z) = \int_{\omega_z} \varphi_z R_{\mathcal{T}} e_z dx + \int_{\cup \mathcal{E}_\ell(z)} \varphi_z R_{\mathcal{E}_\ell} e_z ds \\ &\quad \text{for } z \in \mathcal{K}_\ell, e_z \in W_z \text{ and w.l.o.g. } \int \varphi_z e_z dx = 0 \\ &\leq \underbrace{\|\varphi_z^{\frac{1}{2}} R_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\omega_z)}}_{\lesssim h_z^{-1} \eta_\ell(\mathcal{T}_\ell(z))} \|\text{ph}i_z^{\frac{1}{2}} e_z\|_{L^2(\omega_z)} \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell(z)} \underbrace{\|\varphi_z^{\frac{1}{2}} R_{\mathcal{E}_\ell}\|_{L^2(E)}}_{= \|R_E\|_{L^2(E)} = \eta_\ell(E) \text{tr}_E^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\|\varphi_z^{\frac{1}{2}} e_z\|_{L^2(E)}}_{\text{weighted trace inequality}} \\ &\lesssim \|\varphi_z^{\frac{1}{2}} e_z\|_{L^2(\omega_z)} h_z^{-1} + \underbrace{\|\varphi_z^{\frac{1}{2}} D e_z\|_{L^2(\omega_z)}}_{\|e_z\|_z} \\ &\quad \text{Poincaré inequality : } \|e_z^{\frac{1}{2}} e_z\|_{L^2(\omega_z)} \lesssim \|e_z\|_z \cdot h_z \\ &\lesssim (\eta_\ell(\mathcal{T}_\ell(z)) + \eta_\ell(\mathcal{E}_\ell(z))) \underbrace{\|e_z\|}_{= \eta_z} \end{aligned}$$

Remainings details in C-Funken 2000

Bemerkung

This works in any dimension!

Proposition 9.1. (Consistency Error Estimator) *We consider the case $n = 2$.*

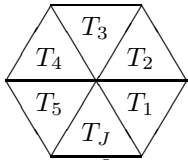
$$\begin{aligned} \mu_\ell &:= \min_{v \in V = H_0^1(\Omega)} \|D_\ell u_\ell^{NC} - Dv\|_{L^2(\Omega)}, \quad u_\ell \text{ is some } CR(\mathcal{T}_\ell) \\ &\leq \min_{v_\ell \in V_\ell = P_1(\sqcup_\ell) \cap V} \|D_\ell u_\ell^{NC} - Dv_\ell\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \min_{v_\ell \in V_\ell} \|h_\ell^{-e1} (u_\ell^{NC} - v_\ell)\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{elementwise inverse estimates}) \\ &\approx \sqrt{\sum_{E \text{ dge}} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_\ell}{\partial s} \right] \right\|_{L^2(E)}^2} \\ &\approx \sqrt{\sum_{E \text{ edge}} h_E^{-1} \left\| [u_\ell^{NC}] \right\|_{L^2(E)}^2} \\ &\lesssim \mu_\ell \end{aligned}$$

Beweis:

Given u_ℓ^{NC} , set $\hat{v}_\ell(z\partial) := \begin{cases} 0 & \text{for } z \in \mathcal{N}_\ell \cap \Omega \\ \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell(z)} (u_\ell^{NC}|_T)(z)}{|\mathcal{T}_\ell(z)|} & \text{for } z \in \mathcal{K}_\ell \end{cases}$ and by linear interpolation $\hat{v}_\ell \in V_\ell$.

$$w_\ell := u_\ell^{NC} - \hat{v}_\ell \in CR(\mathcal{T}_\ell)$$

$$\begin{aligned} \|D_\ell w_\ell\|_{L^2(T)}^2 &\approx \underbrace{|T|h_T^{-2}}_{\approx 1} \sum_{z \in \mathcal{N}(T)} |(W_\ell|_T)(z)|^2 \\ \|D_\ell w_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 &\approx \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \underbrace{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell(z)} (w_\ell|_T)(z) \right)^2}_{=\sum_{j=1}^J (a_j - a)^2} \\ a_j &= (u_\ell^{NC}|_{T_j})(z), \text{ mean of } a_j \end{aligned}$$



$$J \approx 1$$

N.B. $\sum_{j=1}^J (a_j - a)^2 \approx \sum_{j=2}^J (a_j - a_{j-1})^2$

Proof:

$$RHS = \sum_{j=2}^J \underbrace{\left((a_j - a) - (a_{j-1} - a) \right)^2}_{\leq 2(a_j - a)^2 + 2(a_{j-1} - a)^2} \leq 2 \sum_{j=1}^J (a_j - a)^2 \leq 4LHS$$

$$\begin{aligned} J^2 \cdot LHS &= \sum_{j=1}^J \left(\underbrace{Ja_j - \sum_{k=1}^J a_k}_{= (J-1)a_j - \sum_{k \neq j}^J a_k} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^J (a_j - a_k) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=j}^k (a_l - a_{l-1}) \\ &\quad + \sum_{k=j+1}^J \sum_{l=j}^{k-1} (a_l - a_{l+1}) \\ &\Rightarrow \left| Ja_j - \sum_{k=1}^J a_k \right| \leq (J-1) \sum_{l=2}^J |a_l - a_{l-1}| \cdot 1 \leq RHS(J-1)^{\frac{3}{2}} \\ &\leq J(J-1)^{\frac{3}{2}} RHS \end{aligned}$$

Then

$$\|D_\ell w_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 \approx \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \sum_{j=2}^J \underbrace{(a_j - a_{j-1})^2}_{\approx h_E^{-1} \| [u_\ell^{NC}] \|_{L^2(E)}^2}$$

TODO
Bild

Kapitel 10

Adaptive FEM

Loop $\ell = 0, 1, \dots$ until termination:

\mathcal{T}_ℓ SOLVE \rightarrow ESTIMATE \rightarrow MARK & REFINE $\mathcal{T}_{\ell+1}$

INPUT of AFEM: coarse triangulation \mathcal{T}_0 of bounded Lipschitz domain Ω with polygonal boundary $\partial\Omega$ into triangles (no hanging nodes). For each $T \in \mathcal{T}_0$, $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{K}_0 \neq \emptyset$ (one vertex is interior). Model problem with Hilbert space $V = H_0^1(\Omega)$, scalar product $a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ and RHS $F \in V^*$ given by $f \in L^2(\Omega)$.

For each $T \in \mathcal{T}_0$ there exists some edge $E_0(T) \in \mathcal{E}(T)$ which is marked for further refinement (e.g. one of the largest edges). Figure:

TODO
Bild

Data structure in elements = $n4e$ reads a, b, c and marks $E_0(T) := \text{conv}\{c4n(a), c4n(b)\}$.

SOLVE: Given \mathcal{T}_ℓ and $V_\ell := V(\mathcal{T}_\ell) := P_1(\mathcal{T}_\ell) \cap V$ compute $u_\ell \in V_\ell$ with $a(u_\ell, v_\ell) = F(v_\ell)$ for all $v_\ell \in V_\ell$. Set $p_\ell := Du_\ell \in H^1(\mathcal{T}_\ell; \mathbb{R}^2)$ and $e_\ell := u - u_\ell$ with exact (unknown) solution u of $a(u, \cdot) = F$ in V .

ESTIMATE: $R_\ell := F - a(u_\ell, \cdot) \in V^*$ with explicit residual-based error estimator.

$$\eta_T^2 := |T| \cdot \|f\|_{L^2(T)}^2 + |T|^{\frac{1}{2}} \cdot \|[P_\ell]_{\mathcal{E}_\ell} \cdot \nu_{\mathcal{E}_\ell}\|_{L^2(\partial T \setminus \partial\Omega)}^2$$

for all $T \in \mathcal{T}_\ell$, where $|T| \approx$ local mesh-sizes h_T^2 resp. h'_E .

Reliability: $\|e_\ell\| \leq C_{rel} \eta_\ell$ for $\eta_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \eta_T^2$.

Efficiency: $\eta_\ell \leq C_{eff} \|e_\ell\| + \text{osc}_\ell$ for $\text{osc}_\ell := \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell) := \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} |T| \cdot \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2}$

MARK: Given bulk parameter $0 < \Theta \leq 1$ choose $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ with minimal $|\mathcal{M}|$ and $\Theta \eta_\ell^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta_T^2$ by greedy algorithm.

REFINE: Bisection of all $(E_\ell(T) : T \in \mathcal{T}_\ell)$ plus closure algorithm to resolve hanging nodes:

$\text{bisecc}(T)$ w.r.t. $E_\ell(T) = \text{conv}\{A, B\}$ means: take out $T = \text{conv}\{A, B, C\}$ from \mathcal{T}_ℓ and corresponding data and add two new triangles with $c4e$ equal to C, A, D and B, C, D with possibly new node $D = \frac{A+B}{2}$ and associated reference edges $E_{l+1}(T_1)$ and $E_{l+1}(T_2)$.

TODO
Bild
101

Until no hanging node in current (possibly non regular) triangulation do
 bisection of all T in current triangulation with hanging node

Output: Sequence of triangulations \mathcal{T}_ℓ with $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V$.

Bemerkungen (Possible refinements)

1. NVB terminates after a finite number of steps and \mathcal{T}_{l+1} is the coarsest regular triangulation s.t. all $(E_\ell(T)|T \in \mathcal{T}_\ell)$ is bisected and given $T \in \mathcal{T}_\ell$, $\mathcal{T}_{l+1}|_T := \{K \in \mathcal{T}_{l+1} | K \subseteq T\}$ looks as depicted:

TODO

Bild

2. $E_\ell(T)$ does depend on T but not on ℓ (despite $T \in \mathcal{T}_\ell$):

$$\forall m, k, T \in \mathcal{T}_m \cap \mathcal{T}_k : E_m(T) = E_k(T)$$

There is no need to refer to level ℓ in the data structure.

3. For each $K \in \mathcal{T}_\ell$, $\mathcal{T}_\ell|_K$ is the affine image of a triangulation of $T_{ref} = \text{conv}\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ into right isosceles triangles and hence the number of interior angles in \mathcal{T}_ℓ is finite. In case $(E_0(T)|T \in \mathcal{T}_0)$ satisfies some extra condition, the L^2 -Projection $\Pi_\ell : V \rightarrow V_\ell$ is H^1 -stable. (Const. Approx. (2004))

4. The quotient $\frac{|\mathcal{T}_{l+1}|}{|\mathcal{T}_\ell| + |\mathcal{M}_\ell|}$ equals one in case of no hanging nodes in NVB, e.g.

TODO

Bild

but may be arbitrary large as well:

TODO

Bild

Reference edges are diagonales in thoses pictures

However, Binev-Dahmen-DeVare proved (2004) that $|\mathcal{T}_\ell| - |\mathcal{T}_0| \leq c \sum_{\ell=0}^{L-1} |\mathcal{M}_\ell|$ holds for all $L \in \mathbb{N}$ and constant c which depends on \mathcal{T}_0 only.

Bemerkung (Error Reduction)

$f \equiv 1, \Omega =]0, 1[^2$ and $\mathcal{T}_0, \mathcal{M}_0 = \mathcal{T}_0$

TODO

Bild

Prove that $u_0 = u_1 = u_2$.

This is a counter example for error reduction and shows that $\|u - u_2\| \not\leq \|u - u_0\|$ is possible:
 No saturation.

Bemerkung (Konvergenz)

In general, $\bigcup V_\ell =: V_\infty \neq V$. There is no density that guarantees convergence $\lim_{\ell \rightarrow \infty} u_\ell =: u_\infty$ exists and is the Riez representation of $F|_{V_\infty}$ in V_∞ , i.e.

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|u - u_\ell\| = \|u - u_\infty\| = \text{dist}(u, V_\infty) \neq 0$$

Moreover, even if $V_\infty = V$, there convergence speed of $(\|u - u_\ell\|)_{\ell \in \mathbb{N}_0} \searrow 0$ can be arbitrarily slow.

Lemma 10.1. (Estimator Reduction)

$$\exists 0 < \varrho(\Theta) < 1, \Lambda > 0 : \forall \ell, k \in \mathbb{N}_{>0} : \eta_{\ell+k} \leq \varrho(\Theta)\eta_\ell + \Lambda \|P_{\ell+k} - P_\ell\|_{L^2(\Omega)}$$

Beweis:

For $k = 1$:

For $K \in \mathcal{M}_\ell, T \in \mathcal{T}_{\ell+1}|_K, \frac{|T|}{|K|} = 2^{-m}$ for some $m \in \mathbb{N}$, hence

$$|T| \cdot \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \frac{1}{2} |K| \cdot \|f\|_{L^2(K)}^2$$

and so

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}|_K} |T| \cdot \|f\|_{L^2(T)}^2 &\leq \frac{1}{2} |K| \cdot \|f\|_{L^2(K)}^2 \\ \Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}} |T| \|f\|_{L^2(T)}^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} |K| \cdot \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} |K| \cdot \|f\|_{L^2(K)}^2 \end{aligned}$$

TODO

Hier geht's weiter

Äquilibriumfehlenschätzer (Konstruktion in 2D nach Ladevèze)

Modellproblem: Poisson $-\Delta u = f$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, u = 0$ auf $\Gamma_D, \partial_\nu u = g$ auf Γ_N

$\forall v \in V : a(u, v) = F(v),$

$e = u - u_\ell$

$\forall v \in V : a(e, v) = a(u, v) - a(u_\ell, v) = \underbrace{F(v) - a(u_\ell, v)}_{Res}$

$$\|e\| := \sup_{0 \neq v \in V_\ell} \frac{|a(e, v)|}{\|v\|} = \sup_{0 \neq v \in V} \frac{|F(v) - a(u_\ell, v)|}{\|v\|}$$

Ziel: Zerlegung in Beiträge von einzelnen Elementen

Anforderungen:

Sei $\{g_T : T \in \mathcal{T}_\ell\}$, sodass $g_T \approx \nabla_T \cdot \nabla u|_T$ auf ∂T

(Stetigkeit) $\nabla_T \cdot u|_T + \nu_{T'} \cdot u|_{T'} = 0$ auf $\partial T \cap \partial T'$

somit $g_T + g_{T'} = 0$ auf $\partial T \cap \partial T'$

Auf Neumann-Rand: $g_T = g$ auf $\partial T \cap \Gamma_N$

\Rightarrow für alle $v \in V : \int_{\Gamma_N} g_\nu ds = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \int_{\partial T} g_T v ds$

Aufspaltung der Elementanteile:

$F(v) - a(u_\ell, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \{(f, v)_T - a_T(u_\ell, v)\}^- + \int_{\Gamma_N} g_\nu ds$ für alle $v \in V$ mit $a_T(u, v) := \int_T \nabla u \nabla v dx, (f, v)_T := \int_T f v dx$

$$(1) F(v) - a(u_\ell, v) = \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \{(f, v)_T - a_T(u_\ell, v) + \int_{\partial T} g_T v ds\}}_{=: R_T \text{ lokales Residuum}}$$

Lokale Probleme $\Phi_T \in V_T$ Lösung eines lokalen Residuumproblems

(2) $a_T(\Phi_T, v) = (f, v)_T - a_T(u_\ell, v) + \int_{\partial T} g_T v ds \forall v \in V_T$

$V_T := \{v \in H^1(T) | v = 0 \text{ auf } \Gamma_D \cap \partial T\}$

Lösung existiert genau dann, wenn Äquilibrierungsbedingung erfüllt ist (s. Neumann-Problem).

$$\begin{aligned}
 0 &= (f, 1) - a_T(u_\ell, 1) + \int_{\partial T} g_T ds \\
 (1), (2) &\Rightarrow a(e, v) = F(v) - a(u_\ell, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} a_T(\Phi_T, v) \text{ für alle } v \in V \\
 \text{Aus } |a(e, v)| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|\Phi_T\|_T \|v\|_T \text{ folgt obere Abschätzung} \\
 \|e\|_T^2 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \|\Phi_T\|_T^2
 \end{aligned}$$

Bemerkung

Qualität des Schätzers ist abhängig von der (Approximations-)Qualität der lokalen $\{g_T\}$.
 Für den echten Fluss stimmt die obere Schranke mit dem wahren Fehler überein.
 (aus (2)) $(f, v)_T - a_T(u_\ell, v) + \int_{\partial T} v_T \nabla u ds = a_T(u, v) - a_T(u_\ell, v)$
 $\Rightarrow \Phi_T = e$

Definition (Äquilibrierungsbedingung nullter Ordnung)

(E_0)

$$\begin{aligned}
 (f, 1)_T - a_T(v_\ell, 1) + \int_{\partial T} g_T ds &= 0 \\
 g_T + g_{T'} &= 0 \text{ auf } \partial T \cap \partial T' \\
 g_T &= g \text{ auf } \partial T \cap \Gamma_N
 \end{aligned}$$

Problemstellung

Konstruktionsmöglichkeit exakter Flüsse $\{g_T\}$ anhand der Lösung u_ℓ und der Daten f, g mit geringem Aufwand, d.h. als lokale Probleme

Bemerkungen

1. Bedingung (E_0) stellt Unterbestimmtes System dar, d.h. Flüsse sind nicht eindeutig bestimmt.
2. Eine elementweise Berechnung ist aufgrund der Flusskopplung an Elementkanten nicht möglich.

Annahmen für die folgende Konstruktion

reguläre Triangulierung \mathcal{T}_ℓ von $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in Dreiecke, $\{\varphi_n | n \in \mathcal{N}\}$ lineare Lagrange-Basis von V_ℓ mit $\varphi_i(x_k) = \delta_{i,k}$, $\sum_{n \in \mathcal{N}(T)} \varphi_n(x) = 1$ (Element) bzw. $\sum_{n \in \mathcal{N}(E)} \varphi_n(x) = 1$ (Kante)

Definition (Äquilibrierungsbedingung erster Ordnung)

(E_1)

$$\begin{aligned}
 (f, \varphi_n)_T - a_T(h_\ell, \varphi_n) + \int_{\partial T} \varphi_n g_T ds &= 0 \forall n \in \mathcal{N}(T) \\
 g_T + g_{T'} &= 0 \text{ auf } \partial T \cap \partial T' \\
 g_T &= g \text{ auf } \partial T \cap \Gamma_N
 \end{aligned}$$

Ziel

Konstruktion lineare Flussapproximationen, d.h. $g_T|_E = \begin{cases} \text{Neumann Datum auf } E \subseteq \Gamma_N \text{ oder} \\ \text{in } \{\varphi_n | n \in \mathcal{N}(E)\}, \text{ als lokale Probleme.} \end{cases}$

Ansatz: Hilfsfunktionen

$\mu_{T,n}(E) := \int_E g_T \varphi_n ds$, $n \in \mathcal{N}(E)$ definiert lokale Freiheitsgrade
 Bestimmung der $\{\mu_{T,n}^E\}$ ermöglicht Konstruktion von $g_T|_E = \alpha_\ell \varphi_\ell + \alpha_r \varphi_r$ (α_ℓ, α_r zu bestimmen
 durch $\mu_{T,n}^E$)

TODO
 Bild

$$\mathcal{N}(E) = \{l, r\}$$

$$\text{Es gilt } (\varphi_\ell, \varphi_\ell)_E \alpha_\ell + (\varphi_\ell, \varphi_r)_E \alpha_r = \mu_{T,l}^E$$

$$(\varphi_r, \varphi_\ell)_E \alpha_\ell + (\varphi_r, \varphi_r)_E \alpha_r = \mu_{T,r}^E$$

Zudem ergibt sich

$$M_E \begin{pmatrix} \alpha_\ell \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{T,l}^E \\ \mu_{T,r}^E \end{pmatrix} \text{ mit } M_E = \frac{h_E}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_\ell = \frac{2}{h_E} (2\mu_{T,l}^E - \mu_{T,r}^E), \alpha_r = \frac{2}{h_E} (-\mu_{T,l}^E + 2\mu_{T,r}^E)$$

$$\Rightarrow g_T|_E = \frac{2}{h_E} \{ (2\mu_{T,l}^E - \mu_{T,r}^E) \varphi_\ell + (-\mu_{T,l}^E + 2\mu_{T,r}^E) \varphi_r \}$$

(E_1) für $\mu_{T,n}^E$:
 (E_1^μ)

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \partial T} \mu_{T,n}^E &= \delta_T(\varphi_n) \forall n \in \mathcal{N}(T) \\ \mu_{T,n}^E + \mu_{T',n}^E &= 0 \forall n \in \mathcal{N}(E), E = \partial T \cap \partial T' \\ \mu_{T,n}^E &= \int_E g \varphi_n ds \forall n \in \mathcal{N}(E), E = \partial T \cap \Gamma_N \end{aligned}$$

mit $\delta_T := a_T(u_\ell, \varphi_n) - (f, \varphi_n)_T$

Bemerkung

Bedingung E_1^μ ist unabhängig an jedem einzelnen Knoten. Zudem beeinflussen die $\{\varphi_n\}$ jeweils nur einen kleinen Bereich von Ω .

(Patch) $\omega_n := \{T \in \mathcal{T}_\ell | n \in \mathcal{N}(T)\}$

$\mathcal{E}_n := \{E \in \partial \mathcal{T}_\ell | n \in \mathcal{N}(E)\}$

1. innere Knoten, $n, T \in \omega_n$

TODO
 Bild

$$\begin{aligned} \mu_{1,n}^{E_1} + \mu_{1,n}^{E_2} &= \delta_1(\varphi_n) \\ \mu_{2,n}^{E_2} + \mu_{2,n}^{E_3} &= \delta_2(\varphi_n) \\ &\vdots \\ \mu_{N,n}^{E_N} + \mu_{N,n}^{E_1} &= \delta_N(\varphi_n) \end{aligned}$$

aus Bedingungen an den inneren Kanten

$$\begin{aligned}\mu_{1,n}^{E_1} + \mu_{N,n}^{E_1} &= 0 \\ \mu_{2,n}^{E_2} + \mu_{1,n}^{E_2} &= 0 \\ &\vdots \\ \mu_{N,n}^{E_N} + \mu_{N-1,n}^{E_N} &= 0\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, da aus spaltenweiser Addition folgt $0 = Res(\varphi_n) = 0$.

⇒ einparametrische Lösungsschar $\{\mu_{T,n}^{E_j} + C\}_{j=1}^k$

2. Randknoten Gleichungssystem analog zu 1. mit Anpassung hinsichtlich Neumann-Randbedingung und eindeutige Lösbarkeit nur für 2 Neumann-Kanten, ansonsten wieder Lösungsschar.

Wahl der Freiheitsgrade von 1. und 2.:

Bemerkung

Schätzer ist umso exakter, je exakter der konstruierte Fluss g_T in Bezug zu $\sigma := \nabla u$, daher $\mu_{T,n}^E \approx \tilde{\mu}_{T,n}^E := \int_E \varphi_n^{\sigma_\ell}|_T \cdot \nabla_T ds$, d.h. Minimum von $\frac{1}{2} \sum_{T \in \omega_n} \sum_{E \in \partial T} (\mu_{T,n}^E - \tilde{\mu}_{T,n}^E)^2$ unter der Äquilibrierungsbedingung.

⇒ Lagrange-Funktional für (E_1^μ)

$$\mathcal{L}(\{\mu_{T,n}^E\}, \{\lambda_{E,n}\}, \{\sigma_{T,n}\}) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \omega_n} \sum_{E \in \partial T} (\mu_{T,n}^E - \tilde{\mu}_{T,n}^E) + \sum_{T \in \omega_n} \sigma_{T,n} (\delta_{T,n} - \sum_{E \in \partial T} \mu_{T,n}^E + \sum_{E = \partial T \cap \partial T'} \lambda_{E,n} (\mu_{T,n}^E + \mu_{T',n}^E)) + \sum_{E = \partial T \cap \Gamma_N}$$

Ableiten nach $\mu_{T,n}^E$ liefert Optimalitätsbedingung

$$\mu_{T,n}^E - \tilde{\mu}_{T,n}^E - \sigma_{T,n} - \lambda_{E,n} = 0$$

Ableitung nach $\lambda_{E,n}, \sigma_{E,n}$ entspricht (E_1^μ)

Setze $\lambda_{E,n} = 0$ an Dirichletkanten (da beliebig).

Wir erhalten System für gesuchte Flüsse:

$$\mu_{T,n}^E = \begin{cases} \frac{1}{2}(\sigma_{T,n} - \sigma_{T',n} + \tilde{\mu}_{T,n}^E - \tilde{\mu}_{T',n}^E) & E = \partial T \cap \partial T' \\ \int_E g \varphi_n ds & E = \partial T \cap \partial \Gamma_N \\ \sigma_{T,n} + \tilde{\mu}_{T,n}^E & E = \partial T \cap \partial \Gamma_D \end{cases}$$

Eingesetzt in (E_1^μ) ergibt dies für Lagrange Parameter $\sigma_{T,n}$:

$$\frac{1}{2} \sum_{E = \partial T \cap \partial T'} (\sigma_{T,n} - \sigma_{T',n}) + \sum_{E \in \partial T \cap \Gamma_D} \sigma_{T,n} = \tilde{\delta}_{T,n} \forall T \in \omega_n \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{T,n} &:= \delta_{T,n} - \frac{1}{2} \sum_{E = \partial T \cap \partial T'} (\tilde{\mu}_{T,n}^E - \tilde{\mu}_{T',n}^E) - \sum_{E \in \partial T \cap \Gamma_D} \tilde{\mu}_{T,n}^E - \sum_{E \in \partial T \cap \Gamma_N} \int_E g \varphi_n ds \\ &= a_T(u_\ell, \varphi_n) - (f, \varphi_n)_T - \int_{\partial T} \left\langle \frac{\partial u_\ell}{\partial v_T} \right\rangle \varphi_n ds \\ \left\langle \frac{\partial u_\ell}{\partial v_T} \right\rangle &:= \begin{cases} \frac{1}{2} v_T \cdot \{(\nabla u_\ell)_T + (\nabla u_\ell)_{T'}\} & \text{auf } \partial T \cap \partial T' \\ v_T \cdot (\nabla u_\ell)_T & \text{auf } \partial T \cap \Gamma_D \\ g & \text{auf } \partial T \cap \Gamma_N \end{cases}\end{aligned}$$

Bemerkung

(3) ist algebraisches System über Patche ω_n mit Unbekannten $\{\sigma_{T,n}|T \in \omega_n\}$ entsprechend den Elementen im Patch. Unbekannte innerer Knoten sind eindeutig lösbar, für die Randwerte verwendet man Kleinste-Quadrate-Lösungen.

Definition (Äquilibrierungs-Fehlerschätzer μ_{LL})

lokaler Schätzer $\mu_{LL,T} := \|\nabla\Phi_T\|_{L^2(T)} = \|\Phi_T\|_T$

und global $\mu_{LL}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \mu_{LL,T}^2$ wobei $\Phi_T \in V_T$ die Lösung von

$$\forall v \in V_T : \int_T \nabla\Phi_T \nabla v \, dx = R_T(v, g_T)$$

mit g_T als Fluss gemäß Konstruktion und

$$R_T(v, q) := \int_T f v \, dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial T} g v \, ds - \int_T \sigma_\ell \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial T \cap \Gamma_N} q \cdot v_T \, ds$$

ist.

Definition

$r_T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, r_T := f + \operatorname{div}_\ell \sigma_\ell$

$$r_E : \bigcup_{E \in \mathcal{E}} E \rightarrow \mathbb{R}, r_E := J(\sigma_\ell \nabla_F) := \begin{cases} -[\sigma_\ell \cdot \nu_E] & E \in \mathcal{E}_\ell \\ g - \sigma \cdot \nu_\Omega & E \in \mathcal{E}_N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 10.1. (Effizienz) Für $T \in \mathcal{T}_\ell$ gilt

$$\mu_{LL,T} \lesssim \sum_{T' \text{ in } \omega_T} \|R_{T'}\|_{L^2(T')}^2 + h_T \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}_\Omega \\ E \cap \partial T \neq \emptyset}} \|r_E\|_{L^2(E)}^2$$

Fix $K \in \mathcal{M}_\ell \setminus \mathcal{T}_{l+1}$, $K = T_1 \cup T_2$ etc.

TODO

Bild

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_{l+1}, T \subseteq K} \underbrace{|T|^{\frac{1}{2}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{2}}|K|^{\frac{1}{2}}} \cdot \|[p_{l+1} \cdot \nu_E]\|_{L^2(\partial T)}^2 \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|K|^{\frac{1}{2}} \cdot \|[p_{l+1}] \nu_E\|_{L^2(\partial K)}^2 + 2 \sum_{E \in \mathcal{E}_{l+1}, E \subseteq K, E \not\subseteq \partial K} \frac{|K|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \|[p_{l+1}] \nu_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \leq \frac{|K|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} (\|[p_\ell] \nu_E\|_{L^2(\partial K)} + \|[p_{l+1} - p_\ell] \nu_E\|_{L^2(\partial K)})^2 + \sqrt{2}|K|^{\frac{1}{2}} \sum_{E \in \mathcal{E}_{l+1}, E \subseteq K, E \not\subseteq \partial K} \|[p_{l+1} - p_\ell] \nu_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad \text{Notice : } [p_\ell]_E = 0 \\ & \leq \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}|K|^{\frac{1}{2}} \cdot \|[p_\ell] \nu_E\|_{L^2(\partial K)}^2 + \underbrace{\frac{1+\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{2}}|K|^{\frac{1}{2}} \cdot \|[p_{l+1} - p_\ell] \nu_E\|_{L^2(\partial K)}^2 + \sqrt{2}|K|^{\frac{1}{2}} \sum_{E, \dots} \|[p_{l+1} - p_\ell] \nu_E\|_{L^2(E)}^2}_{\leq \max\{\sqrt{2}, \frac{1+\frac{1}{\lambda}}{\sqrt{2}}\} \sum_{F \in \mathcal{E}_{l+1}|_K} \|[p_{l+1} - p_\ell]\|_{L^2(F)}^2} \end{aligned}$$

Trace inequality on $F \in \mathcal{E}_{l+1}|_K$ with ω_F patch in \mathcal{T}_{l+1} , $\bar{\omega}_F = T_+ \cup T_-$ with $T_\pm \in \mathcal{T}_{l+1}$, $F \subseteq \partial T_\pm$

$$\begin{aligned}
 \|[p_{l+1} - p_\ell]\nu_F\|_{L^2(F)} &\leq \|(p_{l+1} - p_\ell)|_{T_+}\nu_F\|_{L^2(F)} + \|(p_{l+1} - p_\ell)|_{T_-}\nu_F\|_{L^2(F)} \\
 &\lesssim |T|^{-\frac{1}{4}} \cdot \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(T_+)} + |T_1|^{\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\|\nabla(p_{l+1} - p_\ell)\|_{L^2(T_+)}}_{\lesssim |T_+|^{-\frac{1}{4}} \cdot \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(T_+)}} \quad + \dots (\text{alles mit } T_-) \\
 &\lesssim |\omega_F|^{-\frac{1}{4}} \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\omega_F)} \quad \text{inverse Estimate}
 \end{aligned}$$

All together:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{l+1|K}} |T|^{\frac{1}{2}} \|[p_{l+1}]\nu_T\|_{L^2(\partial T)}^2 \leq \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} |K|^{\frac{1}{2}} \|[p_\ell]\nu_K\|_{L^2(\partial K)}^2 + C\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(K)}$$

C is independent on $|K|$ or k . The sum of the two inequalities results in

$$\begin{aligned}
 \eta_{l+1}^2 &= \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \left(\frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} |K|^{\frac{1}{2}} \|[p_\ell]\nu_K\|_{L^2(\partial K)}^2 + \frac{1}{2} |K| \cdot \|f\|_{L^2(K)}^2 \right)}_{\leq \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} \eta_K^2} \\
 &+ \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \left(|T| \cdot \|f\|_{L^2(T)}^2 + (1+\lambda) |T|^{\frac{1}{2}} \|[p_\ell]\nu_K\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)}_{\leq (1+\lambda) \eta_K^2} \\
 &+ C\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 \eta_{l+1}^2 &\leq \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}} \underbrace{\left(\sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \eta_K^2 \right)}_{\geq \Theta \eta_\ell^2 \text{ MARK}} + (1+\lambda) \underbrace{\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{M}_\ell} \eta_K^2 \right)}_{= \eta_\ell^2 - \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \eta_T^2 \leq (1-\Theta) \eta_\ell^2} + C\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= (1+\lambda) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \left(\sum_{K \in \mathcal{M}_\ell} \eta_K^2 \right)}_{< 0} + (1+\lambda) \eta_\ell^2 + C\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\leq \underbrace{(1+\lambda)(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \eta_\ell^2}_{\leq -\Theta(1+\lambda)(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \eta_\ell^2} \\
 &\leq (1-\lambda) \left(1 - \Theta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \eta_\ell^2 + C\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

Proper choice of $\lambda > 0$ results in

$$\eta_{l+1} \leq \sqrt{1 - \Theta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \eta_\ell + C^{\frac{1}{2}} \|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}$$

□

Satz 10.2. (Reduction Property) *In Poisson model example, there exist $\alpha, \beta > 0 < \varrho < 1$ such that for all $\ell \in \mathbb{N}_0$:*

$$\alpha \eta_{l+1}^2 + \beta \|p - p_{l+1}\|^2 \leq \varrho (\alpha \eta_\ell^2 + \beta \|p - p_\ell\|^2)$$

Beweis:

Galerkin orthogonality

$$\begin{aligned}
 \eta_{l+1}^2 - \varrho(\Theta)(1 + \lambda)\eta_\ell^2 &\leq \underbrace{C(1 + \frac{1}{\lambda})}_{\beta} \cdot \underbrace{\|p_{l+1} - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\|u_{l+1} - u_\ell\|^2} = \beta \left(\|p - p_\ell\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|p - p_{l+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 \eta_{l+1}^2 + \beta\|p - p_{l+1}\|^2 &\leq \varrho(\Theta)(1 + \lambda)\eta_\ell^2 + \underbrace{\beta\|p - p_\ell\|^2}_{\leq C_{rel}\eta_\ell^2} \\
 &\leq \underbrace{\varrho(\Theta)(1 + \lambda) + \delta C_{rel}}_{\text{reliability}} \eta_\ell^2 + (1 - \delta)\beta\|p - p_\ell\|^2 \\
 &\leq \underbrace{\max\{1 - \delta, \varrho(\Theta)(1 + \lambda) + \delta C_{rel}\}}_{=: \varrho} (\eta_\ell^2 + \beta\|p - p_\ell\|^2)
 \end{aligned}$$

given $\varrho(\Theta) < 1$, choose $\lambda > 0$ with $\varrho(\Theta)(1 + \lambda) < 1$ and $\Theta < \delta < 1 - \varrho(\Theta)(1 + \lambda)$ then $0 < \varrho < 1$. Notice $\beta := C(1 + \frac{1}{\lambda})$ depends on λ . Optimal choice likely for

$$1 - \delta \stackrel{!}{=} \varrho(\Theta)(1 + \lambda) + \delta C_{rel} \Leftrightarrow \delta = \frac{1 - \varrho(\Theta)(1 + \lambda)}{1 + C_{rel}}$$

and so

$$\varrho = 1 - \delta = \frac{\varrho(\Theta)(1 + \frac{1}{\lambda}) + C_{rel}}{1 + C_{rel}}$$

can come as close as possible to lower bound $\frac{\varrho(\Theta) + C_{rel}}{1 + C_{rel}}$ since $\varrho(\Theta) < 1$. \square

Bemerkung

R -linear convergence of $\|p - p_\ell\|$ and η_ℓ

Q -linear convergence of the linear combination

Lemma 10.2. (Discrete Reliability) For \mathcal{T}_{l+k} some refinement of \mathcal{T}_ℓ ,

$$\|p_{l+k} - p_\ell\|^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_{l+k}} \eta_K^2$$

Beweisidee:

$$\| \underbrace{u_{l+k} - u_\ell}_{=: e} \|^2 = a(e, e - J_\ell e)$$

for Scott-Zhang and edges in $\mathcal{E}_\ell \cap \mathcal{E}_{l+k}$ if possible. $\Rightarrow e - J_\ell e = 0$ on $T \in \mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_{l+k}$
 $\Rightarrow \|e\|^2 \lesssim$ standard with $V \equiv 0$ on $\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_{l+k}$ \square

Definition (approximation class)

For $s \in \mathbb{R}$, let $(u, f) \in V \times L^2(\Omega)$ satisfy

$$\|(u, f)\|_{\mathcal{A}_s} := \sup_{N \in \mathbb{N}_0} |N|^s \inf_{|\mathcal{T}_N| - |\mathcal{T}_0| \leq N, \mathcal{T}_N \text{ admissible refinement}} \sqrt{\text{dist}(u, V(\mathcal{T}_N))^2 + \text{osc}(f, \mathcal{T}_N)^2} \leq \infty$$

then $(u, f) \in \mathcal{A}_s$.

Bemerkung

If $u \in \mathcal{A}_s$, then u can be approximated as $|\mathcal{T}_\ell|^{-\frac{1}{s}}$ in case \mathcal{T}_ℓ is optimal.

Satz 10.3. *AFEM is quasi-optimal in the sense that for $(u, f) \in \mathcal{A}_s$ it holds*

$$\sqrt{\|p - p_\ell\|^2 + \text{osc}(f, \mathcal{T}_\ell)^2} \lesssim |\mathcal{T}_\ell \setminus T_0|^{-s} \|(u, f)\|_{\mathcal{A}_s}$$

for $0 < \Theta \ll 1$ sufficiently small.

Index

- C^m -konform, 55
- H^2 -reguläres Problem, 60
- Anfangsbedingungen
 - Diffusionsgleichung, 7
- Anfangsrandwertproblem
 - Diffusionsgleichung, 7
 - Wellengleichung, 15
- approximation operator, 77
- Basis
 - nodal, 53
- broken H^1 -functions, 46
- CFL-Bedingung, 16
- Charakteristik, 17
- Clemént interpolation operator, 77
- Courant-Friedrich-Levy-Bedingung, 16
- Differenzen
 - vorwärts, 8
 - zentral, 8
 - Wellengleichung, 15
- Differenzgleichung, 8
- Diffusions-Anfangswertproblem, 7
 - Lösung, 7
- Diffusionsgleichung, 7
- Diffusionskoeffizient, 7
- diskreter Raum, 55
- Euler
 - explizit, 8
 - implizit, 9
- FDM, 7
- FE-Raum, 55
- Finite-Differenzen-Methode, 7
- Finite-Elemente-Raum, 55
- Finites Element
 - Ciarlet, 53
- Fourierzerlegung, 7
- gebrochener Sobolev-Raum, 46
- globaler Interpolant, 55
- Informationsgeschwindigkeit
 - diskret, 16
 - exakt, 16
- Interpolant
 - globaler, 55
 - lokal, 54
 - nodal, 55
- konform
 - C^m , 55
- Laplace-Gleichung, 21
- Laplace-Operator, 21
- Lax-Milgram-Lemma
 - reflexive Banachräume, 30
- lokaler Interpolant, 54
- Materialverhalten
 - linear, isotrop, elastisch, 31
- Medium, 7
- nodale Basis, 53
- nodaler Interpolant, 55
- Normalenableitung, 21
- operator
 - approximation, 77
 - Oswald, 77
 - Clemént interpolation, 77
 - interpolation
 - Clemént, 77
 - weak, 77
 - Oswald approximation, 77
 - weak interpolation, 77
- Poisson-Problem
 - Primale gemischte Formulierung, 30
 - schwache Form, 30
- Problem
 - H^2 -regulär, 60
- Quader, 21
- Randbedingung
 - Dirichlet, 7
 - Neumann, 7
- Randbedingungen

Diffusionsgleichung, 7

Raum

- diskret, 55
- Finite-Elemente, 55

Raviart-Thomas-Raum, 46

Sobolev-Raum

- gebrochen, 46

Stabilität

- Differenzenverfahren, 11

Transportvorgang, 17

uniformes Gitter, 8

Vorwärtsdifferenzen, 8

weak interpolation operator, 77

Wellengleichung, 15

- Anfangsbedingungen, 15
- Anfangsrandwertproblem, 15
- Randbedingung, 15

Zeitintervall, 7

zentrale Differenzen, 8