Analysis I für Physikstudiengänge

Ein Kompendium zur Vorlesung im Wintersemester 2015/16 von L. Recke

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **2**

2 Grundlagen **4**

2.1 Mengen . . . 4

2.2 Einige Bezeichnungsweisen und Rechenregeln der Logik . . . 5

2.3 Abbildungen . . . 5

2.4 Relationen . . . 7

3 Reelle und komplexe Zahlen **8**

3.1 Die Körperaxiome . . . 8

3.2 Der Körper der komplexen Zahlen . . . 9

3.3 Die Ordnungsaxiome . . . 12

3.4 Vollständigkeit. Supremum und Infimum . . . 13

4 Konvergenz von Folgen **15**

4.1 Rechenregeln . . . 15

4.2 Konvergenzkriterien . . . 17

4.3 Teilfolgen, Häufungspunkte und der Satz von Bolzano-Weierstraß . . . 17

5 Konvergenz von Reihen **18**

5.1 Konvergenzkriterien . . . 19

5.2 Rechenregeln . . . 20

6 Konvergenz von Folgen und Reihen von Funktionen **21**

6.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz . . . 21

6.2 Potenzreihen . . . 22

7 Die elementaren Funktionen **23**

7.1 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen 23

7.2 Exponential- und hyperbolische Funktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen 25

8 Konvergenz von Funktionen **27**

9 Stetige Funktionen **29**

9.1 Stetige Funktionen auf Intervallen. Der Zwischenwertsatz 30

9.2 Stetigkeit und Monotonie 31

9.3 Stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Mengen 31

10 Differenzierbare Funktionen **32**

10.1 Differenzierbarkeit und Ableitung 32

10.2 Rechenregeln 33

10.3 Höhere Ableitungen. Der Satz von Taylor 34

10.4 Anwendungen 36

11 Integrierbare Funktionen **37**

11.1 Integrierbarkeit und bestimmtes Integral 37

11.2 Rechenregeln 38

11.3 Stammfunktionen und Integrationsregeln. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 39

11.4 Numerische Integration 40

11.5 Uneigentliche Integrale 41

11.6 Anwendungen 43

12 Konvergenz in metrischen Räumen **45**

12.1 Metriken 45

12.2 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen 48

12.3 Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz 49

1 Vorwort

Warum ist es sinnvoll, Mathematik-Vorlesungen für Physik-Studiengänge separiert von denen für Mathemtik-Studiengänge durchzuführen (falls die Universität genügend sogenannte Lehrkapazität besitzt, um sich diesen Luxus leisten zu können)? In erster Linie deshalb, weil für

Mathematik-Studenten die Mathematik gleichermaßen Selbstzweck und Mittel zum Zweck ist. Für Physik-Studenten degegen ist Mathematik hauptsächlich Mittel zum Zweck und nur in geringem Maße Selbstzweck.

Was bedeutet das praktisch?

Zum Beispiel wird in einer Vorlesung für Mathemtik-Studiengänge zu einem bestimmten Gleichungstyp üblicherweise aufgezeigt, welche die allgemeist möglichen Voraussetzungen sind, damit eine Lösung existiert, warum diese Lösung existiert und wie man sie berechnen und approximieren kann. In einer Vorlesung für Physik-Studiengänge dagegen ist vor allen Dingen wichtig, unter welchen einfach zu verifizierenden, in Anwendungen typischerweise auftretenden Bedingungen eine Lösung existiert und wie man sie berechnen und approximieren kann.

Ein anderes Beispiel: Ein Mathematik-Student sollte wissen, was die Menge der reellen Zahlen ist (axiomatische Antwort: ein vollständiger, Archimedisch geordneter Körper; konstruktive Antwort: das Ergebnis der Vervollständigung der Menge der rationalen Zahlen) und wie man aus den Axiomen die vielen Rechenregeln für reelle Zahlen ableitet. Ein Physik-Student dagegen sollte die vielen Rechenregeln für reelle Zahlen kennen und ein Gefühl dafür besitzen, in welcher Situation man welche Rechenregel erfolgreich anwenden kann. Um eine gewisse Struktur in die Menge der vielen Rechenregeln zu bekommen ist es auch für Physik-Studenten nützlich, die Axiome der reellen Zahlen zu kennen, denn dann können sie einordnen, welche Rechenregeln nur mit den algebraischen Körper-Operationen operieren, welche Rechenregeln darüber hinaus die Ordungsrelation ausnutzen und welche vielleicht auch die Vollständigkeit benutzen.

Mathematik-Kenntnisse sind für viele Physik-Studenten eine Art von Werkzeugkasten, folglich sollte die Mathematik-Ausbildung von Physik-Studenten darauf abzielen, dass möglichst viel nützliches Werkzeug in diesem Kasten ist, dass das viele Werzeug übersichtlich eingeordnet ist und dass die Studenten gut mit dem Werkzeug umgehen können. Das bedeutet nicht, dass in Mathematik-Vorlesungen für Physik-Studiengänge weniger exakt oder weniger eindeutig formuliert werden muß. Im Gegenteil: Die Exaktheit und Eindeutigkeit der mathematischen Sprache und ihrer Begriffe und Formeln ist eines der wichtigsten und leistungsfähigsten Werkzeuge des Physikers.

In diesem Sinne ist die folgende Skripte aufgebaut: Sie präsentiert alle relevanten Begriffe, Sätze, Formeln und Algorithmen und viele Beispiele, aber fast keine Beweise. Sie präsentiert also nur das Skellet einer Vorlesung. Dabei ist bis auf ganz wenige Ausnahmen das Prinzip eingehalten, dass jeder neue Begriff nur auf dem vorhergehenden Text basiert und dass jeder Satz mit Hilfe der vorhergehenden Resultate bewiesen werden kann. Die wenigen Ausnahmen wurden wegen des folgenden Problems gemacht: Ein natürlicher logischer Aufbau des Textes wäre es, erst Konvergenz von Folgen und Reihen von Zahlen zu betrachten, danach Konvergenz von Folgen und Reihen von Funktionen, danach Konvergenz von Funktionen, danach Stetigkeit und danach die elementare Funktionen. Ein Nachteil dieses Aufbaus besteht darin, dass die elementaren Funktionen erst spät eingeführt werden, man also bis dahin nur wenige Beispiele zur Verfügung hat. Deshalb werden in meiner Vorlesung die elementaren Funktionen schon vor Konvergenz von Funktionen und Stetigkeit eingeführt. Und dort mache ich eine solche Ausnahme, z.B. bei dem folgenden Satz: Für jedes $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so dass $f(0) = 1$ und $f(1) = a$ und $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Dort wird schon bei der Einführung der Exponentialfunktionen der Stetigkeitsbegriff (der natürlich aus der Schule schon bekannt ist, in der Vorlesung aber erst später behandelt wird) benutzt. Diese Ausnahme sollte auch deshalb erlaubt sein, weil eine Vorlesung "Analysis I", jedenfalls solange sie Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ behandelt, weitgehend eine Wiederholung von Schulstoff ist. In "Analysis I" werden seltener neue (im Vergleich zur Schule) Begriffe und Fakten präsentiert, vielmehr werden mehr oder weniger bekannte Fakten systematisiert und, soweit möglich, in einen allgemeineren Zusammenhang (z.B. für Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) gestellt.

2 Grundlagen

2.1 Mengen

Einige Mengen besitzen Standard-Bezeichnungen, z.B. ist $\emptyset$ das Symbol für die leere Menge, $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen,

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ist die Menge der rationalen Zahlen, und $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

Die "naive" Mengenlehre führt zu Widersprüchen, z.B. zu dem Russelschen Antinom: Es sei M die Menge aller Mengen, und $M_0 := \{X \in M : \ X \notin X\}$. Dann ist die Frage "Ist M_0 Element von M_0?" nicht beantwortbar.

Axiom der vollständigen Induktion: Wenn eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Eigenschaften

$$1 \in M \ \text{(“Induktionsanfang”)}$$

und

$$\text{wenn } n \in M, \text{ dann auch } n+1 \in M \ \text{(“Induktionsschritt”)}$$

besitzt, dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Anzahl von Untermengen endlicher Mengen: Die Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ besitzt genau 2^n verschiedene Untermengen und genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Untermengen. Dabei heißen die natürlichen Zahlen

$$\binom{n}{0} := 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n$$

Binomialkoeffizienten, weil sie auch in der binomischen Formel (3.1) auftreten.

Operationen mit Mengen: Für zwei Mengen X und Y definiert man ihre **Vereinigung**, ihren **Durchschnitt**, ihre **Mengendifferenz** und ihr **kartesisches Produkt** durch

$$\begin{array}{rcl} X \cup Y &:=& \{x : \ x \in X \ \text{ oder } \ x \in Y\}, \\ X \cap Y &:=& \{x : \ x \in X \ \text{ und } \ x \in Y\}, \\ X \setminus Y &:=& \{x : \ x \in X \ \text{ und } \ x \notin Y\}, \\ X \times Y &:=& \{(x, y) : \ x \in X \ \text{ und } \ y \in Y\}. \end{array}$$

Das kann man auch auf endlich viele oder sogar unendlich viele Mengen verallgemeinern: Zum Beispiel definiert man für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$X^n := X \times \ldots \times X = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

die n-te Potenz der Menge X, und die Mengen

$$\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x : \text{ Es existiert ein } \alpha \in A \text{ mit } x \in X_\alpha.\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha := \{x : \text{ Für alle } \alpha \in A \text{ gilt } x \in X_\alpha.\}$$

heißen Vereinigung und Durchschnitt der Mengenfamilie $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Dabei gelten verschiedene Rechenregeln, insbesondere die DeMorganschen Regeln

$$X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus X_\alpha), \quad X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} (X \setminus X_\alpha).$$

2.2 Einige Bezeichnungsweisen und Rechenregeln der Logik

Für die logische Implikation "aus A folgt B" schreiben wir $A \Rightarrow B$, und für die logische Äquivalenz "A gilt genau dann, wenn B gilt" schreiben wir $A \Leftrightarrow B$. Die logische Negation "es gilt nicht A" wird mit $\neg A$ bezeichnet, und die logischen Quantoren "es existiert ein(e)" bzw. "für alle" werden mit $\exists$ bzw $\forall$ bezeichnet. Dabei gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
(\neg(A \text{ und } B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \text{ oder } (\neg B)),\\
(\neg(A \text{ oder } B)) &\Leftrightarrow ((\neg A) \text{ und } (\neg B)),\\
(A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \text{ und } (B \Rightarrow A)),\\
((A \Rightarrow B) \text{ und } (B \Rightarrow C)) &\Rightarrow (A \Rightarrow C),\\
(A \Rightarrow B) &\Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)),\\
(\neg(A \Rightarrow B)) &\Leftrightarrow (A \text{ und } (\neg B)),\\
(\neg(\forall x \in X \text{ gilt } A)) &\Leftrightarrow (\exists x \in X \text{ mit } \neg A),\\
(\neg(\exists x \in X \text{ mit } A)) &\Leftrightarrow (\forall x \in X \text{ gilt } \neg A).
\end{aligned}$$

Beispiel: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Folglich ist f unstetig, wenn gilt

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

2.3 Abbildungen

Wenn eine Abbildung f eine Menge X in eine Menge Y abbildet, so schreibt man $f : X \to Y$ oder $x \in X \mapsto y = f(x) \in Y$. Die Mengen X bzw. Y heißen dann **Definitionsbereich** bzw. **Wertebereich** der Abbildung f. Bisweilen wird auch die Menge $\{f(x) : x \in X\}$ (die ungleich Y sein kann) Wertebereich oder Bildmenge der Abbildung f genannt. Die Menge

$$\{(x, f(x)) \in X \times Y : \ x \in X\}$$

heißt **Graph** von f. Die identische Abbildung auf einer Menge X wird mit id_X bezeichnet, d.h. $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

Einschränkung und Fortsetzung: Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
(i) Für $Z \subseteq X$ heißt die Abbildung $g : Z \to Y$, die definiert ist durch $g(z) := f(z)$ für alle $z \in Z$, Einschränkung von f auf Z, und man schreibt $f|_Z := g$.
(ii) Für $X \subseteq Z$ heißt eine Abbildung $g : Z \to Y$, für die $g|_X = f$ gilt, Fortsetzung von f auf Z.

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität: Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt surjektiv (bzw. injektiv bzw. bijektiv) wenn für für jedes $y \in Y$ mindestens (bzw. höchstens bzw. genau) ein $x \in X$ existiert mit $y = f(x)$.

Superposition: Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $h : X \to Z$, die definiert ist durch $h(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$, Superposition von f und g, und man schreibt $g \circ f := h$.

Beispiel: Die Abbildungen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) := x^2$ und $g(x) := 2x$. Dann gilt $(g \circ f)(x) = 2x^2$ und $(f \circ g)(x) = 4x^2$, d.h. $g \circ f \neq f \circ g$.

Inverse Abbildung: Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:
(i) Die Abbildung f ist bijektiv.
(ii) Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y \in Y$ genau eine Lösung $x \in X$.
(iii) Es existiert eine Abbildung $g : Y \to X$, so daß gilt

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

Die Abbildung g ist dann eindeutig bestimmt und heißt inverse Abbildung zur Abbildung f, und man schreibt $f^{-1} := g$.

Satz über die inverse Abbildung einer Superposition: Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei bijektive Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ auch bijektiv, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Satz über den Graphen der inversen Abbildung: Es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann liegt ein Tupel $(y, x) \in Y \times X$ genau dann im Graphen von f^{-1}, wenn das Tupel (x, y) im Graphen von f liegt. Insbesondere, wenn X und Y Untermengen von $\mathbb{R}$ sind, so ist der Graph von f^{-1} die Spiegelung (an der Geraden $y = x$ in der (x, y)-Ebene) des Graphen von f.

Bilder und Urbilder von Mengen bzgl. einer Abbildung Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Für $X_0 \subseteq X$ heißt die Menge

$$f(X_0) := \{y \in Y : \text{ Es existiert ein } x \in X_0 \text{ mit } f(x) = y.\}$$

Bild von X_0 bzgl. f, für $Y_0 \subseteq Y$ ist, so heißt die Menge

$$f^{-1}(Y_0) := \{x \in X : f(x) \in Y_0\}$$

Urbild von Y_0 bzgl. f, und es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{array}{rcl} X_0 & \subseteq & f^{-1}(f(X_0)) \text{ für alle } X_0 \subseteq X, \\ f(f^{-1}(Y_0)) & \subseteq & Y_0 \text{ für alle } Y_0 \subseteq Y, \\ f(X_1) \cup f(X_2) & = & f(X_1 \cup X_2) \text{ für alle } X_1, X_2 \subseteq X, \\ f(X_1 \cap X_2) & \subseteq & f(X_1) \cap f(X_2) \text{ für alle } X_1, X_2 \subseteq X \text{ mit } X_1 \cap X_2 \neq \emptyset, \\ f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) & = & f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \text{ für alle } Y_1, Y_2 \subseteq Y, \\ f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) & = & f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \text{ für alle } Y_1, Y_2 \subseteq Y \text{ mit } Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset. \end{array}$$

Wenn f bijektiv ist, so gilt

$$\{x \in X : f(x) \in Y_0\} = \{f^{-1}(y) : y \in Y_0\} \text{ für alle } Y_0 \subseteq Y. \tag{2.1}$$

Mit anderen Worten: Wenn f bijektiv ist, so kann man das Symbol $f^{-1}(Y_0)$ als Urbild von Y_0 bzgl. der Abbildung f (linke Seite in (2.1)) auffassen oder als Bild von Y_0 bzgl. der Abbildung f^{-1} (rechte Seite in (2.1)), beide Auffassungen führen zum selben Ergebnis.

2.4 Relationen

Es sei X eine Menge. Wenn eine Menge $M \subseteq X \times X$ gegeben ist, so sagt man, dass auf X eine Relation gegeben ist in folgendem Sinn: $x \in X$ steht zu $y \in X$ in Relation (man schreibt dann $x \sim y$), wenn $(x, y) \in M$. Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Ordnungsrelation**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt

$$x \sim x, \tag{2.2}$$

$$\text{wenn } x \sim y \text{ und } y \sim z, \text{ dann } x \sim z, \tag{2.3}$$

$$\text{wenn } x \sim y \text{ und } y \sim x, \text{ dann } x = y. \tag{2.4}$$

Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für all $x, y, z \in X$ gilt (2.2) und (2.3) und (anstelle von (2.4))

$$\text{wenn } x \sim y, \text{ dann } y \sim x.$$

Beispiele von Ordnungsrelationen: In $\mathbb{R}$ ist eine Ordnungsrelation folgendermaßen gegeben: Es gilt $x \sim y$, wenn $x \leq y$. Das ist sogar eine sogenannte lineare (oder totale) Ordnungsrelation, weil für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \sim y \text{ oder } y \sim x.$$

In der Menge aller Mengen ist eine Ordnungsrelation folgendermaßen gegeben: Es gilt $X \sim Y$, wenn $X \subseteq Y$. Das ist keine lineare Ordnungsrelation.

Äquivalenzklassen: Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge X. Dann definiert man für jedes $x \in X$ die Äquivalenzklasse von x durch

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\},$$

und es gilt für alle $x, y \in X$

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad [x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad [x] \cap [y] \neq \emptyset.$$

Beispiel einer Äquivalenzrelation (Gleichheit modulo p): Für jedes $p \in \mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation in $\mathbb{Z}$ folgendermaßen gegeben: Es gilt $m \sim n$, wenn ein $l \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m-n = lp$. Es existieren genau p verschiedene Äquivalenzklassen (die sogenannten **Restklassen modulo p**), nämlich

$$[k] = \{k + lp : \ l \in \mathbb{Z}\} \text{ für } k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Beispiel einer Äquivalenzrelation (Gleichheit "fast überall"): In der Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Äquivalenzrelation folgendermaßen gegeben: Es gilt $f \sim g$, wenn die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq g(x)\}$ endlich ist.

Beispiel einer Äquivalenzrelation (Gleichmächtigkeit): In der Menge aller Mengen ist eine Äquivalenzrelation folgendermaßen gegeben: Es gilt $X \sim Y$, wenn eine bijektive Abbildung von X auf Y existiert. Wenn $X \sim Y$ gilt, so nennt man die Mengen X und Y gleichmächtig. Wenn $X \sim \mathbb{N}$ gilt, so nennt man die Menge X **abzählbar**. Wenn X nicht endlich und nicht abzählbar ist, so nennt man X **überabzählbar**.

Satz: Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Satz von Cantor: Eine Menge und die Menge ihrer Untermengen können nicht gleichmächtig sein.

3 Reelle und komplexe Zahlen

3.1 Die Körperaxiome

Die folgende Terminologie ist eine Verallgemeinerung der grundlegenden Eigenschaften der Operationen Addition und Multiplikation von reellen Zahlen.

Eine Menge $\mathbb{K}$ mit zwei Abbildungen $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto x + y \in \mathbb{K}$ (genannt Addition) und $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto xy \in \mathbb{K}$ (genannt Multiplikation) heißt **Körper**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(I) Assoziativität der Addition Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$. Deshalb kann man dafür einfach $x + y + z$ schreiben.

(II) Kommutativität der Addition Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x + y = y + x$.

(III) Existenz des Nullelements Es existiert ein Element in $\mathbb{K}$, so daß für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt: Die Summe aus x und diesem Element ist gleich x. Dieses Element ist wegen dem Axiom (II) eindeutig bestimmt, es wird Null genannt und mit dem Symbol 0 bezeichnet.

(IV) Existenz des inversen bzgl. der Addition Elements Für alle $x \in \mathbb{K}$ existiert ein Element in $\mathbb{K}$, so daß gilt: Die Summe aus x und diesem Element ist gleich 0. Dieses Element ist eindeutig bestimmt (wie man mit Hilfe der Axiome (I)-(III) beweisen kann), es wird "minus x" genannt und mit dem Symbol $-x$ bezeichnet.

(V) Assoziativität der Multiplikation Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x(yz) = (xy)z$. Deshalb kann man dafür einfach xyz schreiben.

(VI) Kommutativität der Multiplikation Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $xy = yx$.

(VII) Existenz des Einselements Es existiert ein Element in $\mathbb{K}$, so daß für alle $x \in \mathbb{K}$ gilt: Das Produkt aus x und diesem Element ist gleich x. Dieses Element ist wegen dem Axiom (VI) eindeutig bestimmt, es wird Eins genannt und mit dem Symbol 1 bezeichnet.

(VIII) Existenz des inversen bzgl. der Multiplikation Elements Für alle $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert ein Element in $\mathbb{K}$, so daß gilt: Das Produkt aus x und diesem Element ist gleich 1. Dieses Element ist eindeutig bestimmt (wie man mit Hilfe der anderen Axiome beweisen kann) und wird mit dem Symbol x^{-1} bezeichnet.

(IX) Distributivität von Addition und Multiplikation Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x(y + z) = xy + xz$.

(X) Es gilt $0 \neq 1$.

Bezeichnungsweisen: In einem Körper $\mathbb{K}$ schreibt man anstelle von $x + (-y)$ auch $x - y$. Analog schreibt man, falls $y \neq 0$ ist, anstelle von xy^{-1} auch $\frac{x}{y}$. Ferner definiert man für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{K}$

$$nx := x + \ldots + x \ (n \text{ Summanden}), \quad x^n := x \cdot x \cdots x \ (n \text{ Faktoren})$$

und $x^0 := 1$.

Einige Rechenregeln: In jedem Körper $\mathbb{K}$ gilt

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 y_2} \text{ für alle } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{K} \text{ mit } x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0,$$

$$x^m x^n = x^{m+n},\ (x^m)^n = x^{mn}\ (xy)^n = x^n y^n \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K} \text{ und } m, n \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ für alle } x \in \mathbb{K} \setminus \{1\} \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{K} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ (binomische Formel)} \tag{3.1}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \right)^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (x_j y_k - x_k y_j)^2 \text{ (Lagrange-Identität).} \tag{3.2}$$

3.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Die Menge $\mathbb{R}^2$ wird mit den folgenden Operationen zu einem Körper (und dann mit $\mathbb{C}$ bezeichnet):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{bmatrix}.$$

Dabei sind $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ das Null- und das Einselement in diesem Körper (und diese werden mit 0 und 1 bezeichnet), das inverse Element bzgl. der Addition von $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$, und das inverse Element bzgl. der Multiplikation von $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ist $\begin{bmatrix} x/(x^2 + y^2) \\ -y/(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$. Komplexe Zahlen, die auf der reellen Achse liegen, d.h. die vom Typ $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ sind, werden mit der entsprechenden reellen Zahl x identifiziert. Das kann nicht zur Verwirrung führen, weil dann auch die komplexe Summe $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ bzw. das komplexe Produkt $\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ mit der entsprechenden reellen Summe x_1+x_2 bzw. dem entsprechenden reellen Produkt x_1x_2 identifiziert werden. Insbesondere werden dabei das Nullelement und das Einselement im Körper $\mathbb{R}$ mit dem Nullelement und dem Einselement im Körper $\mathbb{C}$ identifiziert. Schließlich bezeichnet man mit

$$i := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

die sogenannte imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. Dann ergibt sich die berühmte Formel

$$i^2 = -1$$

sowie die folgende Schreibweise für komplexe Zahlen:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x + iy.$$

Die reellen Zahlen x bzw. y heißen dann Realteil bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl $x + iy$, und man schreibt

$$\mathrm{Re}\,(x+iy) := x, \quad \mathrm{Im}\,(x+iy) := y.$$

Zu jeder komplexen Zahl $x + iy \neq 0$ existiert genau ein Paar $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ mit

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.3}$$

Die linke bzw. die rechte Seite von (3.3) heißt Darstellung der komplexen Zahl in **kartesischen Koordinaten** bzw. in **Polarkoordinaten**. Wenn die Polarkoordinaten (r, φ) gegeben sind, so berechnet man die entsprechenden kartesischen Koordinaten durch

$$x = r\cos\varphi, \ \ y = r\sin\varphi.$$

Wenn die kartesischen Koordinaten $(x, y) \neq (0, 0)$ gegeben sind, so berechnet man die entsprechenden Polarkoordinaten durch

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arg(x,y) := \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{falls } x > 0,\ y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(-\frac{x}{y}\right) & \text{falls } x \leq 0,\ y > 0, \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{falls } x < 0,\ y \leq 0, \\ \frac{3\pi}{2} + \arctan\left(-\frac{x}{y}\right) & \text{falls } x \geq 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

In Polarkoordinaten berechnet man das Produkt durch

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

und die Summe durch $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_3\left(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3\right)$ mit (vgl. (3.4))

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}, \ \varphi_3 = \arg(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2, r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2). \tag{3.5}$$

Mit anderen Worten: In kartesischen Koordinaten ist die Formel für die Summe zweier komplexer Zahlen einfach, und die Formel für das Produkt ist etwas komplizierter. In Polarkoordinaten ist die Formel für das Produkt einfach, und die Formel für die Summe ist erheblich komplizierter.

Rechenregeln: Es gilt

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{3.6}$$

Insbesondere besitzt die Gleichung $z^n = 1$ genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Aus (3.6) folgt mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i\sin n\varphi &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\varphi)^{n-k}(i\sin^{\varphi})^k = \\ &= \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \dots \\ &\quad +i\left(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \dots\right). \end{aligned}$$

Daraus folgen die **Moivre'schen Formeln:** Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \dots, \\ \sin n\varphi &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \dots. \end{aligned}$$

Betrag und konjugiert komplexe Zahl: Für eine gegebene komplexe Zahl $z = x + iy$ bezeichnet man mit

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} \text{ bzw. } \overline{z} := x - iy$$

den Betrag von z bzw. die konjugiert komplexe Zahl zu z. Dabei gilt für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1},$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad |z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad |\overline{z}|^2 = |z|^2 = z\overline{z}$$

und

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \text{ (Dreiecksungleichung nach unten und nach oben).}$$

Komplexe Zahlen und Wellen: Bisweilen identifiziert man Wellen von Typ $r\sin(\omega t + \varphi)$ ($r \ge 0$ ist die Amplitude, $\omega \ge 0$ ist die Frequenz, $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Phase, und $t \in \mathbb{R}$ ist die Zeit) mit entsprechenden komplexen Zahlen $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Wegen

$$\begin{aligned} &r_1\sin(\omega t + \varphi_1) + r_2\sin(\omega t + \varphi_2) \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}\sin\left(\omega t + \arg(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2, r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2)\right) \end{aligned}$$

ist die Überlagerung zweier solcher Wellen wieder eine solche Welle, und die der Überlagerung zweier Wellen entsprechende komplexe Zahl ist gleich Summe der den beiden Wellen entsprechenden komplexen Zahlen (vgl. (3.5)). Insbesondere ist die Amplitude der Überlagerung gleich $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$. Wenn man ferner ein Kristall mit Absorbtionskonstante $s \geq 0$ und Phasenverschiebung $\psi \in \mathbb{R}$ (das optische Wellen $r\sin(\omega t + \varphi)$ in optische Wellen $rs\sin(\omega t + \varphi + \psi)$ transformiert, also die Amplitude r in eine neue Amplitude rs und die Phase φ eine neue Phase $\varphi + \psi$) mit der komplexen Zahl $s(\cos\psi + i\sin\psi)$ identifiziert, so muß man die transformierte Welle mit dem Produkt $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$ identifizieren.

Wärmeleitungsgleichung und Schrödinger-Gleichung: Die wichtigste partielle Differentialgleichung der Thermodynamik ist die Wärmeleitungsgleichung $\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)$, und die wichtigste partielle Differentialgleichung der Quantenmechanik ist die Schrödinger-Gleichung $\partial_t u(t,x) = i\partial_x^2 u(t,x)$. Beide Gleichungen haben vollkommen verschiedene Lösungseigenschaften, und sie beschreiben vollkommen verschiedene physikalische Phänomene, obwohl sie sich nur um den Faktor i unterscheiden.

3.3 Die Ordnungsaxiome

Die folgende Terminologie ist eine Verallgemeinerung der grundlegenden Eigenschaften der Ordnungsrelation in der Menge der reellen Zahlen.

Eine Körper $\mathbb{K}$ heißt **geordneter Körper**, wenn in $\mathbb{K}$ eine Relation $\leq$ gegeben ist, so dass folgende Axiome erfüllt sind:

(XI) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

(XII) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $x \leq y$ und $y \leq x$ gilt $x = y$.

(XIII) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $x \leq y$ und $y \leq z$ gilt $x \leq z$.

(XIV) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $x \leq y$ gilt $x + z \leq y + z$.

(XV) Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ mit $0 \leq x$ und $0 \leq y$ gilt $0 \leq xy$.

Die Axiome (XI)-(XIII) besagen, dass $\leq$ eine lineare Ordnungsrelation ist, und die Axiome (XI)-(XIII) beschreiben, wie diese Ordungsrelation mit den algebraischen Operationen Addition und Multiplikation zusammenwirkt.

Wenn $x \leq y$ und $x \neq y$ gilt, so schreibt man $x < y$.

Einige Rechenregeln: In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq x^2, \\
&\text{wenn } x \leq y \text{ und } 0 \leq z, \text{ dann } xz \leq yz, \\
&\text{wenn } x \leq y \text{ und } z \leq 0, \text{ dann } yz \leq xz, \\
&\text{wenn } 0 < x \leq y, \text{ dann } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}, \\
&-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2, \\
&\text{wenn } -1 < x \text{ und } n \in \mathbb{N}, \text{ dann } (1+x)^n \geq 1 + nx \text{ (Bernoullische Ungleichung)},
\end{aligned}
$$

und aus der Lagrange-Identität (3.2) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \quad \text{(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)}. \tag{3.7}$$

Maximum und Minimum: Es seien $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper, $X \subseteq \mathbb{K}$ und $x_0 \in X$, und für alle $x \in X$ gelte $x_0 \geq x$ (bzw. $x_0 \leq x$). Dann heißt x_0 Maximum (bzw. Minimum) von X, und man schreibt $\max X := x_0$ (bzw. $\min X := x_0$).

Archimedisches Axiom: Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt **Archimedisch geordnet**, wenn gilt:

(XVI) Für alle $x > 0$ und $y \geq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx \geq y$.

Beispiele: Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit den dort üblichen arithmetischen Operationen und und der dort üblichen Ordnungensrelation Archimedisch geordnete Körper.

Satz über die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert ein $z \in \mathbb{Q}$ mit $x < z < y$ (und folglich existieren unendlich viele verschiedene solche z).

Intervalle: In einem geordneten Körper $\mathbb{K}$ und für $a, b \in \mathbb{K}$ mit $a \leq b$ definiert man das abgeschlossene Intervall

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{K} : a \leq x \leq b\},$$

das offene Intervall

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{K} : a < x < b\},$$

die halboffenen Intervalle

$$\begin{aligned} [a, b) &:= \{x \in \mathbb{K} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in \mathbb{K} : a < x \leq b\} \end{aligned}$$

sowie die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{K} : x \geq a\}, \\ (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{K} : x > a\}, \\ (-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{K} : x \leq b\}, \\ (-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{K} : x < b\}. \end{aligned}$$

3.4 Vollständigkeit. Supremum und Infimum

Der in gewissem Sinn einzige Unterschied zwischen den Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ besteht darin, dass $\mathbb{R}$ vollständig im Sinne der folgenden Definition ist, $\mathbb{Q}$ aber nicht.

Ein Archimedisch geordneter Körper heißt **vollständig**, wenn gilt:

(XVII) Für alle Folgen (a_n) und (b_n) von Elementen aus $\mathbb{K}$ mit

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq x \leq b_n$.

Die Bedingung (XVII) kann man auch folgendermaßen formulieren: Für jede Folge ineinandergeschachtelter abgeschlossener Intervalle

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset,$$

und deshalb heißt das Axiom auch **Intervallschachtelungsaxiom**.

Existenz und Eindeutigkeit: Wenn man die Frage, ob wenigstens ein vollständiger, Archimedisch geordneter Körper existiert, positiv beantworten will, so muß man einen solchen "aus etwas Vorhandenem", z.B. aus der Menge der rationalen Zahlen, konstruieren. Dafür existieren verschiedene Methoden, die alle sehr aufwändig sind. Einfacher ist es zu beweisen, dass in gewissem Sinn alle vollständigeren, Archimedisch geordneten Körper gleich sind (und diese werden dann identifiziert und als der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bezeichnet):

Eindeutigkeitssatz: Es seien $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ zwei vollständigere, Archimedisch geordnete Körper. Dann existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{K}_1$ gilt

$$\begin{aligned} &f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \quad f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), \\ &x_1 \leq x_2, \text{ genau dann, wenn } f(x_1) \leq f(x_2). \end{aligned}$$

Nach oben beschränkte bzw. nach unten beschränkte bzw. beschränkte Mengen: Es sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper.

(i) Eine Menge $X \subseteq \mathbb{K}$ heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{K}$ existiert, so daß für alle $x \in X$ gilt $x \leq c$ (bzw. $x \geq c$). Die Zahl c heißt dann obere (bzw. untere) Schranke von X.

(ii) Eine Menge $X \subseteq \mathbb{K}$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Supremum und Infimum: Es sei $\mathbb{K}$ ein vollständiger, Archimedisch geordneter Körper, und $X \subseteq \mathbb{K}$ sei nach oben (bzw. nach unten) beschränkt. Dann existiert in der Menge der oberen (bzw. unteren) Schranken von X ein Minimum (bzw. ein Maximum). Diese kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke von X heißt Supremum (bzw. Infimum) von X und wird mit $\sup X$ (bzw. $\inf X$) bezeichnet.

Verhältnis von Maximum und Supremum (bzw. von Minimum und Infimum): Es sei $\mathbb{K}$ ein vollständiger, Archimedisch geordneter Körper, und $X \subseteq \mathbb{K}$ sei nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, dann gilt: Die Menge X besitzt ein Maximum (bzw. ein Minimum) genau dann, wenn $\sup X$ (bzw. $\inf X$) in X liegt, und dann ist $\max X = \sup X$ (bzw. $\min X = \inf X$).

Beispiel: Das halboffene Intervall $[0, 1)$ ist beschränkt, die Mengen seiner oberen bzw. unteren Schranken sind $[1, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0]$. Folglich gilt

$$\sup[0, 1) = \min[1, \infty) = 1, \quad \inf[0, 1) = \max(-\infty, 0] = 0 = \min[0, 1).$$

Nicht-Vollständigkeit von $\mathbb{Q}$: Die Menge der rationalen oberen Schranken von $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ ist nicht leer, besitzt aber kein Minimum.

4 Konvergenz von Folgen

In diesem Kapitel bezeichnen wir mit (x_n) oder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $x_1, x_2, \ldots$ Folgen komplexer Zahlen. Wenn alle Folgenglieder reell sein sollen (Folgen reeller Zahlen), so wird das speziell erwähnt.

Eigentliche Konvergenz: Eine Folge (x_n) heißt **konvergent**, wenn ein $x \in \mathbb{C}$ existiert, so dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \; |x_n - x| \leq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Die Zahl x ist durch (4.1) eindeutig bestimmt, heißt **Grenzwert** der Folge, und man schreibt

$$x_n \to x \quad \text{oder} \quad x_n \to x \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Eine Folge heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Uneigentliche Konvergenz: Eine divergente Folge (x_n) reeller Zahlen heißt **uneigentlich konvergent**, wenn entweder

$$\forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \; x_n \geq c \tag{4.2}$$

oder

$$\forall c \in \mathbb{R} \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \; x_n \leq c \tag{4.3}$$

gilt. Im Fall (4.2) schreibt man

$$x_n \to \infty \quad \text{oder} \quad x_n \to \infty \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty,$$

im Fall (4.3)

$$x_n \to -\infty \quad \text{oder} \quad x_n \to -\infty \text{ für } n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

4.1 Rechenregeln

Konvergenz und algebraische Operationen: Es seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen, dann gilt:

(i) Die Folgen $(x_n + y_n)$ und $(x_n y_n)$ sind ebenfalls konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_0$ gilt $y_n \neq 0$. Ferner ist die Folge (x_n/y_n) konvergent, und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Uneigentliche Konvergenz und algebraische Operationen: Es seien (x_n) und (y_n) zwei Folgen reeller Zahlen, dann gilt:

(i) Wenn (x_n) einen Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ besitzt und (y_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) strebt, so strebt auch $(x_n + y_n)$ gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), und $(x_n y_n)$ strebt gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), wenn $x > 0$ ist, oder gegen minus Unendlich (bzw. Unendlich), wenn $x < 0$ ist. Ferner konvergiert (x_n/y_n) gegen Null.

(ii) Wenn sowohl (x_n) als auch (y_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) streben, so strebt auch $(x_n + y_n)$ gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich), und $(x_n y_n)$ strebt gegen Unendlich.

(iii) Wenn (x_n) gegen Unendlich (bzw. minus Unendlich) strebt und (y_n) gegen minus Unendlich (bzw. Unendlich) , so strebt $(x_n y_n)$ gegen minus Unendlich.

(iv) Wenn (x_n) gegen Null konvergiert und für alle n gilt $x_n > 0$ (bzw. $x_n < 0$), so strebt $(1/x_n)$ gegen Unendlich (bzw. gegen minus Unendlich).

Bemerkung zur Bezeichnungsweise: Um die etwas umständlichen Formulierungen der obigen Rechenregeln zu vermeiden, benutzt man bisweilen die folgenden, rein formalen Schreibweisen:

$$\begin{aligned}
&x + (\pm\infty) = \pm\infty,\\
&x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \text{ falls } x > 0,\\
&x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty, \text{ falls } x < 0,\\
&(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,\\
&(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \infty,\\
&(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty,\\
&1/(+0) = \infty,\\
&1/(-0) = -\infty.
\end{aligned}$$

Unbestimmte Ausdrücke: Wenn (x_n) gegen Unendlich strebt und (y_n) gegen minus Unendlich, so kann mit der Folge (x_n+y_n) "alles" passieren: Sie kann gegen eine reelle Zahl konvergieren oder auch divergieren. Wenn sie divergiert, so kann sie gegen Unendlich streben oder gegen minus Unendlich oder auch keines von beidem. Analog kann "alles" mit der Folge $(x_n y_n)$ passieren, wenn (x_n) gegen Null konvergiert und (y_n) gegen Unendlich oder gegen minus Unendlich strebt. Schließlich kann auch "alles" mit der Folge (x_n/y_n) passieren, wenn (x_n) und (y_n) gegen Null konvergieren (und $y_n > 0$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$) oder wenn (x_n) und (y_n) gegen Unendlich oder gegen minus Unendlich streben. In diesem Sinne sagt man, dass die Ausdrücke $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$ und ∞/∞ unbestimmte Ausdrücke sind.

Beispiel eines unbestimmten Ausdrucks vom Typ $\infty - \infty$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$

Beispiel eines unbestimmten Ausdrucks vom Typ $0 \cdot \infty$: $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \to 1/2$

Beispiel eines unbestimmten Ausdrucks vom Typ 0/0:

$$\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \to 2$$

Konvergenz und Ungleichungen: Es seien (x_n) und (y_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n \leq y_n$. Dann folgt:

(i) $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$

(ii) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Ferner sei (z_n) eine Folge reeller Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $x_n \leq z_n \leq y_n$. Dann konvergiert auch (z_n), und

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Beispiele für unbestimmte Ausdrücke vom Typ ∞/∞: Für alle $a > 1$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a^n}{n^k} \to \infty \text{ und } \frac{a^n}{n!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Dabei ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. In diesem Sinne sagt man, dass die Folge $(n!)$ schneller gegen Unendlich strebt als die Folge (a^n), und dass die Folge (a^n) schneller gegen Unendlich strebt als die Folge (n^k).

Beispiel eines unbestimmten Ausdrucks vom Typ ∞^0: $\sqrt[n]{n} \to 1$

4.2 Konvergenzkriterien

Cauchy-Kriterium: Eine Folge (x_n) ist genau dann konvergent, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_0 : \; |x_m - x_n| \leq \varepsilon. \tag{4.4}$$

Mit anderen Worten: Die Bedingung (4.4) ist notwendig und hinreichend dafür, dass ein $x \in \mathbb{C}$ mit (4.1) existiert. Der wesentliche Vorteil der Bedingung (4.4) im Vergleich zur Bedingung (4.1) ist, dass (4.4) verifiziert werden kann, ohne dass man den Grenzwert x kennt.

Monotone Folgen: Eine Folge (x_n) reeller Zahlen heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \leq x_{n+1}$ (bzw. $x_n \geq x_{n+1}$). Eine Folge heißt monoton, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Beschränkte Folgen: Eine Folge (x_n) heißt beschränkt, wenn ein $c \geq 0$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|x_n| \leq c$. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Monotoniekriterium: Jede monotone beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiel eines unbestimmten Ausdrucks vom Typ 1^∞: Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} =: e,$$

d.h. die beiden Grenzwerte existieren, sind gleich und werden mit e (Eulersche Zahl) bezeichnet.

4.3 Teilfolgen, Häufungspunkte und der Satz von Bolzano-Weierstraß

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_j < n_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ Teilfolge der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Häufungspunkte: Es seien (x_n) eine Folge und x eine komplexe Zahl, dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Es existiert eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $x_{n_j} \to x$ für $j \to \infty$.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existieren unendlich viele verschiedene $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$.

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist (und folglich beide Bedingungen erfüllt sind), so heißt die Zahl x Häufungspunkt der Folge (x_n).

Satz von Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Limes Superior und Limes Inferior: Die Menge aller Häufungspunkte einer beschränkten Folge (x_n) reeller Zahlen besitzt ein Maximum (bzw. ein Minimum). Dieses Maximum (bzw. Minimum) wird Limes superior (bzw. Limes inferior) von (x_n) genannt und mit

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \text{ oder } \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \Big(\text{bzw. } \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ oder } \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\Big)$$

bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n, \text{ falls } (x_n) \text{ konvergent ist.}$$

5 Konvergenz von Reihen

Reihen und ihre Summanden und Partialsummen: Zu jeder Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ kann man die Folge

$$s_0 := x_0, s_1 := x_0 + x_1, s_2 := x_0 + x_1 + x_2, \ldots$$

betrachten. Diese nennt man dann Reihe mit den Summanden x_j und den Partialsummen s_n. Mit anderen Worten: Eine Reihe ist eine Folge der speziellen Bauart

$$\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)_{n=0}^{\infty}. \tag{5.1}$$

In den Folgen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ der Summanden und $s_0, s_1, s_2, \ldots$ der Partialsummen ist der erste Index traditionell die Null, manchmal aber auch die Eins.

Konvergenz und absolute Konvergenz: Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist. Man schreibt dann

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} x_j,$$

und diese Zahl heißt dann Grenzwert der Reihe. Eine Reihe heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist. Die Reihe (5.1) heißt absolut konvergent, wenn die Reihe mit den Summanden $|x_0|, |x_1|, |x_2|, \ldots$ konvergent ist.

Bemerkungen zur Bezeichnungsweise: (i) Häufig wird für eine Reihe anstelle von (5.1) auch $\sum x_n$ oder sogar $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ geschrieben, d.h. das Symbol $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ wird sowohl für die Reihe (also eine Folge von Partialsummen, die konvergieren kann oder nicht) als auch für deren Summe (also eine Zahl, die existiert, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert) benutzt.

(ii) Es sei k eine fixierte natürliche Zahl. Dann hängt es nicht von den ersten k Folgengliedern $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ab, ob eine Folge (x_j) konvergiert und welchen Grenzwert sie gegebenfalls besitzt. Bei Reihen ist das anders: Ob die Reihe (5.1) konvergiert, hängt nicht von den Summanden $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ab, wohl aber die Summe $\sum_{j=0}^{\infty} x_j$. Deshalb muß man sorgfältig angeben, welcher Summand der erste in der Reihe sein soll und welche Zahlen der Summationsindex j durchlaufen soll (in den meisten Fällen alle ganzen Zahlen $j \geq 0$ oder $j \geq 1$).

5.1 Konvergenzkriterien

Cauchy-Kriterium: Die Reihe (5.1) konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} x_j \right| < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt $x_j \to 0$ für $j \to \infty$, wenn die Reihe (5.1) konvergent ist.

Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen: Die Reihe (5.1) konvergiert, wenn $x_j \to 0$ für $j \to \infty$ und wenn für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $x_j x_{j+1} < 0$ (d.h. die Summanden haben abwechselndes Vorzeichen) und $|x_j| \geq |x_{j+1}|$ (d.h. die Beträge der Summanden bilden eine monoton fallende Nullfolge).

Majorantenkriterium: Die Reihe (5.1) konvergiert absolut, wenn eine konvergente reelle Reihe $\sum y_n$ und ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existieren , so daß für alle $j \geq j_0$ gilt $|x_n| \leq y_n$. Wenn $j_0 = 0$ gewählt werden kann, so gilt ferner

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty} y_j.$$

Wurzelkriterium: Die Reihe (5.1) konvergiert absolut, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists a < 1 \, \exists j_0 \in \mathbb{N} \, \forall j \geq j_0 : \sqrt[j]{|x_j|} \leq a. \tag{5.2}$$

Die Bedingung (5.2) ist genau dann erfüllt, wenn

$$\limsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{|x_j|} < 1.$$

Die Reihe (5.1) ist divergent, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall j_0 \in \mathbb{N} \, \exists j \geq j_0 : \sqrt[j]{|x_j|} \geq 1. \tag{5.3}$$

Die Bedingung (5.3) ist erfüllt, wenn

$$\limsup_{j \to \infty} \sqrt[j]{|x_j|} > 1.$$

Quotientenkriterium: Die Reihe (5.1) konvergiert absolut, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists a < 1 \, \exists j_0 \in \mathbb{N} \, \forall j \geq j_0 : \; x_j \neq 0 \text{ und } \left| \frac{x_{j+1}}{x_j} \right| \leq a.$$

Die Reihe (5.1) ist divergent, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall j_0 \in \mathbb{N} \, \exists j \geq j_0 : \; x_j \neq 0 \text{ und } \left| \frac{x_{j+1}}{x_j} \right| \geq 1.$$

Dezimalbruchzerlegung: (i) Zu jedem $x \geq 0$ existiert genau eine Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, so daß gilt

$$\xi_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\} \text{ und } \xi_j \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ für alle } j > 0, \tag{5.4}$$

$$\text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ existiert ein } j \geq k \text{ mit } \xi_j \neq 9 \tag{5.5}$$

und

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi_j}{10^j}. \tag{5.6}$$

Dabei ist ξ_0 der ganze Anteil von x, d.h. $\xi_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, und ξ_{n+1} ist der ganze Anteil von $10^{n+1}x - 10^n \xi_1 - \ldots - 10\xi_n$.

(ii) Zu jeder Folge $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ mit (5.4) und (5.5) existiert genau ein $x \geq 0$ mit (5.6).

Beispiele:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty \text{ (harmonische Reihe)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} c^j = \frac{1}{1-c} \text{ für } |c| < 1 \text{ (geometrische Reihe)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j+1} = \ln 2$$

5.2 Rechenregeln

Linearkombination konvergenter Reihen: Es seien $\sum x_j$ und $\sum y_j$ zwei konvergente Reihen, und $a, b \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann ist auch die Reihe $\sum(ax_j + by_j)$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty}(ax_j + by_j) = a\sum_{j=0}^{\infty} x_j + b\sum_{j=0}^{\infty} y_j.$$

Multiplikation absolut konvergenter Reihen: Es seien $\sum x_j$ und $\sum y_j$ zwei absolut konvergente Reihen, und

$$j \in \{0, 1, 2, \ldots\} \mapsto (\varphi(j), \psi(j)) \in \{0, 1, 2, \ldots\} \times \{0, 1, 2, \ldots\}$$

sei eine bijektive Abbildung. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} y_j = \sum_{j=0}^{\infty} x_{\varphi(j)} y_{\psi(j)}. \tag{5.7}$$

Dabei ist die Reihe auf der rechten Seite von (5.7) ebenfalls absolut konvergent. Zum Beispiel, wenn man für $j = 0, 1, \ldots$ und $k = 1, 2, \ldots, j+1$

$$\varphi\left(\frac{j}{2}(j+1) + k\right) := k \text{ und } \psi\left(\frac{j}{2}(j+1) + k\right) := j + 2 - k$$

setzt, so ergibt sich die sogenannte Cauchy-Produkt-Formel

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} y_j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} x_k y_{j-k} \right).$$

6 Konvergenz von Folgen und Reihen von Funktionen

6.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Es sei $X \subseteq \mathbb{C}$, und $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sei eine Folge von Funktionen, die alle den gleichen Definitionsbereich X besitzen. Die Funktionenfolge (f_n) heißt **punktweise konvergent**, wenn eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so daß gilt

$$\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \tag{6.1}$$

d.h.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in X.$$

Man sagt dann, dass die Folge (f_n) punktweise gegen f konvergiert, und man schreibt $f_n \to f$ punktweise. Die Funktionenfolge (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent**, wenn eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ existiert, so daß gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in X : \; |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{6.2}$$

Man sagt dann, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, und man schreibt $f_n \to f$ gleichmäßig. Analoge Bezeichnungsweisen werden für Reihen von Funktionen benutzt.

Vertauschbarkeit von Grenzwerten: Es sei $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen, $x_1, x_2, \ldots \in X$ sei eine Folge von Zahlen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge $(f_n(x_m))_{m=1}^{\infty}$ konvergent. Dann sind auch die Folgen $(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ und $(\lim_{m\to\infty} f_n(x_m))_{n=1}^{\infty}$ konvergent, und ihre Grenzwerte sind gleich, d.h. es gilt

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} f_n(x_m) = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} f_n(x_m).$$

Beispiele: (i) Es seien $X := [0, 1]$ und $f_n(x) := x^n$. Dann gilt $f_n \to f$ für $n \to \infty$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

punktweise, aber nicht gleichmäßig. Insbesondere ist

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n = 0 \neq 1 = \lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n.$$

(ii) Es seien $X := [0, 1]$, $f_n(x) := x/n$ und $f(x) := 0$. Dann gilt $f_n \to f$ für $n \to \infty$ gleichmäßig.

(iii) Es seien $X := \mathbb{R}$, $f_n(x) := x/n$ und $f(x) := 0$. Dann gilt $f_n \to f$ für $n \to \infty$ punktweise, aber nicht gleichmäßig.

6.2 Potenzreihen

Es seien $(a_j)_{j=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und $x, x_0 \in \mathbb{C}$. Dann nennt man die Reihe

$$\sum a_j (x - x_0)^j \tag{6.3}$$

ebenso wie die Funktion

$$x \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j,$$

die definiert ist für alle $x \in \mathbb{C}$, so daß (6.3) konvergiert, Potenzreihe mit den Koeffizienten a_n und dem Zentrum x_0.

Konvergenzradius: Es sei

$$R := \begin{cases} 0 & \text{falls die Folge } \left(\sqrt[j]{|a_j|}\right) \text{ unbeschränkt ist,} \\ \infty & \text{falls } \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = 0, \\ \left(\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}\right)^{-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt R Konvergenzradius der Potenzreihe (6.3), und es gilt:

(i) Es sei $R = 0$. Dann divergiert die Potenzreihe (6.3) für alle $x \neq x_0$.

(ii) Es sei $R = \infty$. Dann konvergiert Potenzreihe (6.3) absolut für alle $x \in \mathbb{C}$. Ferner gilt für jedes $r > 0$, dass die Potenzreihe (6.3) in $\{x \in \mathbb{C} : \ |x - x_0| \leq r\}$ gleichmäßig konvergiert.

(iii) Es sei $0 < R < \infty$, dann gilt: Für $|x - x_0| < R$ konvergiert die Potenzreihe (6.3) absolut, und für $|x - x_0| > R$ divergiert sie. Die Menge $\{x \in \mathbb{C} : \ |x - x_0| < R\}$ heißt Konvergenzkreis der Potenzreihe. Ferner gilt für jedes $r \in (0, R)$, dass die Potenzreihe (6.3) in $\{x \in \mathbb{C} : \ |x - x_0| \leq R\}$ gleichmäßig konvergiert.

Beispiele: Die folgenden Beispiele zeigen, dass das Konvergenzverhalten von (6.3) an Rand des Konvergenzkreises sehr verschieden sein kann.

(i) Es sei $a_j = j$ und $x_0 = 0$. Dann ist $R = 1$, und (6.3) divergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$.

(ii) Es sei $a_j = 1/j^2$ und $x_0 = 0$. Dann ist wieder $R = 1$, aber (6.3) konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$.

(iii) Es sei $a_j = 1/j$ und $x_0 = 0$. Dann ist wieder $R = 1$, (6.3) konvergiert für $x = 1$ und divergiert für $x = -1$.

Beispiel: Das folgende Beispiel zeigt, dass eine Potenzreihe im allgemeinen nicht gleichmäßig in ihrem Konvergenzkreis konvergiert: Der Konvergenzkreis der Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$$

ist $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$. Der Betrag des n-ten Reihenrestes ($n \in \mathbb{N}$ beliebig) ist aber unbeschränkt auf dem Konvergenzkreis weil

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} z^j - \sum_{j=0}^{\infty} z^j \right| = \left| \frac{1}{1-z} - \frac{1 - z^{n+1}}{1-z} \right| = \left| \frac{z^{n+1}}{1-z} \right| \to \infty \text{ für } z \to 1.$$

Methode des Koeffizientenvergleichs: Es seien $\sum a_j(x-x_0)^j$ und $\sum \tilde{a}_j(x-x_0)^j$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $R>0$ und $\tilde{R}>0$, und es gelte

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j(x-x_0)^j \text{ für } |x-x_0| < \min\{R, \tilde{R}\}.$$

Dann folgt $a_j = \tilde{a}_j$ für alle j.

Produkt von Potenzreihen: Es seien $\sum a_j(x-x_0)^j$ und $\sum \tilde{a}_j(x-x_0)^j$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $R>0$ und $\tilde{R}>0$, dann gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{a}_j(x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k \tilde{a}_{j-k} \right) (x-x_0)^j \text{ für } |x-x_0| < \min\{R, \tilde{R}\}.$$

7 Die elementaren Funktionen

Traditionell bezeichnet man die trigonometrischen Funktionen, die Exponentialfunktionen, die Potenzfunktionen und jeweils ihre inversen Funktionen als elementare Funktionen. Ferner werden auch alle Superpositionen, Linearkombinationen, Produkte und Quotienten von elementaren Funktionen wieder elementare Funktionen genannt.

7.1 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen

Rektifizierbarkeit und Bogenlänge: Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Die Kurve $y=f(x),\ x\in[a,b]$ (d.h. der Graph von f) heißt rektifizierbar, wenn die Menge

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\Big(f(x_j)-f(x_{j-1})\Big)^2 + \Big(x_j - x_{j-1}\Big)^2} :\ n\in\mathbb{N},\ a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b \right\}$$

nach oben beschränkt ist, und das Supremum dieser Menge heißt dann Bogenlänge der Kurve $y=f(x),\ x\in[a,b]$. Es existieren stetige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, die nicht rektifizierbar sind. Aber wenn f stetig differenzierbar ist, so ist f rektifizierbar, und die Bogenlänge der Kurve $y=f(x),\ x\in[a,b]$ kann man dann einfacher (als das Supremum der Längen der Polygonenzüge) berechnen durch

$$\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Eine Möglichkeit der Einführung von Sinus und Kosinus in $\mathbb{R}$: Es existiert genau ein Paar stetiger Funktionen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=0$und $g(0)=1$, dass für alle $x\in(0,1]$ gilt $x<f(x)<f(x)/g(x)$ und dass für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x), \\ g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y), \\ f(x)^2 + g(x)^2 = 1. \end{array}\right\} \tag{7.1}$$

Diese Funktionen heißen Sinus bzw. Kosinus, und man schreibt $\sin x := f(x)$ und $\cos x := g(x)$. Ferner gilt für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dass x (bzw. $\frac{\pi}{2} - x$) die Bogenlänge der Kurve $\eta = \sqrt{1-\xi^2}$, $\xi \in [0, \sin x]$ (bzw. $\xi \in [0, \cos x]$) ist.

Eine Möglichkeit der Einführung von Sinus und Kosinus in $\mathbb{C}$: Die Potenzreihen

$$\sin x := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \tag{7.2}$$

$$\cos x := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \tag{7.3}$$

konvergieren für alle $x \in \mathbb{C}$, und ihre Einschränkungen auf $\mathbb{R}$ sind die oben eingeführten Funktionen Sinus und Kosinus auf $\mathbb{R}$.

Tangens: Die Funktion

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : \ n \in \mathbb{Z}\right\} \mapsto \tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}$$

heißt Tangens.

Inverse trigonometrische Funktionen: (i) Die inverse Funktion zur Funktion

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \sin x \in [-1, 1]$$

heißt **Arcussinus**, und man schreibt $y = \arcsin x$, falls $x = \sin y$ und $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(ii) Die inverse Funktion zur Funktion

$$x \in [0, \pi] \mapsto \cos x \in [-1, 1]$$

heißt **Arcuskosinus**, und man schreibt $y = \arccos x$, falls $x = \cos y$ und $y \in [0, \pi]$.

(iii) Die inverse Funktion zur Funktion

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \mapsto \tan x \in \mathbb{R}$$

heißt **Arcustangens**, man schreibt $y = \arctan x$, falls $x = \tan y$ und $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und es gilt

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Polarkoordinaten: Die Abbildung

$$(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

ist bijektiv.

Kugelkoordinaten: Die Abbildung

$$\begin{aligned} &(r, \varphi, \psi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \mapsto \\ &\quad \mapsto (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Zylinderkoordinaten: Die Abbildung

$$(r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\}$$

ist bijektiv.

7.2 Exponential- und hyperbolische Funktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen

Eine Möglichkeit der Einführung der Exponentialfunktionen in $\mathbb{R}$: Zu jedem $a > 0$ existiert genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß gilt $f(1) = a$ und

$$f(x+y) = f(x)f(y) \ \text{ für alle } \ x, y \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Diese Funktion heißt Exponentialfunktion mit der Basis a, und man schreibt $a^x := f(x)$. Dabei gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $a, b > 0$

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x a^y \ \text{ (also (7.4))}, \\ a^{xy} &= (a^x)^y, \\ a^x b^x &= (ab)^x. \end{aligned}$$

Berechnung für rationale Argumente: Für alle $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = a \cdot a \cdots a \ \ (n \text{ Faktoren}), \ \ a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}.$$

Ferner ist x=$a^{\frac{1}{n}}$ die eindeutige Lösung $x \in [0, \infty)$ der Gleichung $x^n = a$ (und man schreibt auch $\sqrt[n]{a} := a^{\frac{1}{n}}$), und

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} \ \text{ für alle } \ m \in \mathbb{Z}.$$

Logarithmusfunktionen in $\mathbb{R}$: Für $a > 0$ mit $a \neq 0$ ist die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, \infty)$ bijektiv, und die inverse Funktion heißt Logarithmusfunktion mit der Basis a, und man schreibt $y = \log_a x$, wenn $x = a^y$ ist. Die Logarithmusfunktion, deren Basis die Eulersche Zahl e ist, heißt Logarithmus naturalis und wird mit $\ln x$ bezeichnet. Für alle $x, y > 0$ und alle $a, b > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y, \\ y \ \log_a x &= \log_a x^y, \\ \log_a x &= \log_b x \cdot \log_a b. \end{aligned}$$

Exponentieller Zerfall und Halbwertszeit: Es seien $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine stetige Funktion und $\tau > 0$ eine fixierte Zahl. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t + \tau) = \frac{1}{2} f(t)$. Deshalb heißt τ Halbwertszeit der Funktion f.

(ii) Es existiert ein $a > 0$ so dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $f(t) = a2^{-t/\tau}$.

Exponentialfunktion und Logarithmen in $\mathbb{C}$: (i) Die Potenzreihe

$$e^x := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \tag{7.5}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$, und ihre Einschränkung auf $\mathbb{R}$ ist die oben eingeführte Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$.

(ii) Die Potenzreihe

$$\ln x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(x-1)^{j+1}}{j+1}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x-1| < 1$. Für $x \in (0, 2]$ ist sie gleich der eingeführten Funktion Logarithmus naturalis.

(iii) Für $a > 0$ defininiert man

$$\begin{aligned} a^x &:= e^{x \ln a} && \text{für } x \in \mathbb{C}, \\ \log_a x &:= \frac{\ln x}{\ln a} && \text{für } x \in \mathbb{C} \text{ mit } |x-1| < 1. \end{aligned}$$

Eulersche Formel: Aus (7.2), (7.3) und (7.5) folgt

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Hyperbolische Funktionen: Die Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die definiert sind durch

$$\begin{aligned} \sinh x &:= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = -i \sin(ix), \\ \cosh x &:= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cos(ix), \end{aligned}$$

heißen **Sinus hyperbolicus** und **Kosinus hyperbolicus**. Sie erfüllen Rechenregeln, die analog zu denen der trigonometrischen Funktionen sind (vgl. (7.1)): Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} &\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x, \\ &\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\ &\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \end{aligned}$$

Eine Solitonen-Lösung der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung: In sehr seltenen Fällen sind gewisse Lösungen von physikalisch relevanten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen elementare Funktionen und können deshalb als Formelausdrücke exakt angegeben werden. Ein berühmtes Beispiel dafür ist die sogenannte Solitonen-Lösung

$$u(t, x) = \frac{e^{ix/2}}{\cosh t}$$

der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_x u(t, x) + \frac{1}{2}\partial_t^2 u(t, x) + |u(t, x|^2 u(t, x) = 0.$$

Potenzfunktionen: Für gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$x \in (0,\infty) \mapsto x^\alpha \in (0,\infty)$$

Potenzfunktion mit dem Exponenten α, und es gilt

$$x^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{1\cdot 2\cdots j}\,(x-1)^j \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } x \in (0,2).$$

8 Konvergenz von Funktionen

In diesem Kapitel ist X eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wenn insbesondere X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein soll, so wird das speziell erwähnt.

Häufungspunkte von Mengen: Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von X, wenn für alle $\delta > 0$ ein $x \in X$ existiert mit $0 < |x - x_0| < \delta$, d.h. wenn eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in X \setminus \{x_0\}$ existiert mit $x_n \to x_0$, d.h. wenn $\{x \in X \setminus \{x_0\} : |x - x_0| \le r\}$ eine unendliche Menge ist für jedes $r > 0$.

Vergleich: Häufungspunkte von Folgen und von Mengen: Die Folge $1, -1, 1, -1, \ldots$ besitzt zwei Häufungspunkte, nämlich 1 und -1. Die Menge ihrer Folgenglieder, d.h. die Menge $\{-1, 1\}$, besitzt keine Häufungspunkte.

Beispiele: (i) Die Menge aller Häufungspunkte von $\left\{\frac{1}{m+n} :\ m, n \in \mathbb{N}\right\}$ ist $\left\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, und die Menge aller Häufungspunkte dieser Menge aller Häufungspunkte ist $\{0\}$.

(ii) Die Menge aller Häufungspunkte von $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$.

Eigentliche Grenzwerte vom Typ $x \to x_0$: Es seien x_0 Häufungspunkt von X, $y_0 \in \mathbb{C}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X :\ 0 < |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| \le \varepsilon. \tag{8.1}$$

Dann nennt man f konvergent für $\boldsymbol{x}$ gegen $\boldsymbol{x_0}$, y_0 heißt Grenzwert von f für x gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Bemerkungen zur Terminologie: (i) Weil x_0 Häufungspunkt von X ist, ist die Zahl y_0 durch die Bedingung (8.1) eindeutig bestimmt. Wenn x_0 nicht Häufungspunkt von X wäre, so würde jedes $y_0 \in \mathbb{C}$ die Bedingung (8.1) erfüllen.

(ii) Die Bedingung (8.1) hängt nicht davon ab, ob f in x_0 definiert ist oder nicht (d.h. ob $x_0 \in X$ oder $x_0 \notin X$), und sie hängt im Fall $x_0 \in X$ nicht von dem Wert $f(x_0)$ ab.

Äquivalenz von $\varepsilon\delta$-Sprache und Folgensprache: Es seien $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, x_0 sei Häufungspunkt von X, und $y_0 \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

(ii) Für jede Folge $x_1, x_2, \ldots \in X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$.

Beispiele:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \ \ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Eigentliche Grenzwerte vom Typ $x \downarrow x_0$: Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$, und x_0 sei Häufungspunkt von $X \cap]x_0, \infty[$, $y_0 \in \mathbb{C}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion, und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X: \; x_0 < x \leq x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Dann nennt man f konvergent für $\boldsymbol{x}$ von oben gegen $\boldsymbol{x_0}$, y_0 heißt rechtsseitiger Grenzwert von f für x gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = y_0.$$

Analog führt man die Schreibweise

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = y_0$$

ein.

Beispiel: $2^{1/x} \to 0$ für $x \uparrow 0$.

Eigentliche Grenzwerte vom Typ $x \to \infty$: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, $y_0 \in \mathbb{C}$ und $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists b \in \mathbb{R} \, \forall x \in X: \; x \geq b \Rightarrow |f(x) - y_0| \leq \varepsilon.$$

Dann nennt man f konvergent für x gegen Unendlich, y_0 heißt Grenzwert von f für x gegen Unendlich, und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0.$$

Analog führt man die Schreibweise

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

ein.

Beispiel: $2^{1/x} \to 1$ für $x \to \pm\infty$.

Uneigentliche Grenzwerte vom Typ $x \to x_0$: Es seien x_0 Häufungspunkt von X und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und es gelte

$$\forall a \in \mathbb{R} \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X: \; 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq a.$$

Dann sagt man, dass f gegen Unendlich strebt bei x gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Analog führt man die Schreibweise

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

ein.

Beispiel: $(1/x)^2 \to \infty$ für $x \to 0$.

Uneigentliche Grenzwerte vom Typ $x \downarrow x_0$: Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$, und x_0 sei Häufungspunkt von $X \cap]x_0, \infty[$, $f : X \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, und es gelte

$$\forall a \in \mathbb{R} \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X: \; x_0 < x \leq x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \geq a.$$

Dann sagt man, dass f gegen Unendlich konvergiert für x von oben gegen x_0, und man schreibt

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Analog führt man die Schreibweisen

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = -\infty$$

ein.

Beispiel: $1/x \to \infty$ für $x \downarrow 0$.

Uneigentliche Grenzwerte vom Typ $x \to \infty$: Es seien $X \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und es gelte

$$\forall a \in \mathbb{R} \ \exists b \in \mathbb{R} \ \forall x \in X : \ x \geq b \Rightarrow f(x) \geq a.$$

Dann sagt man, dass f gegen Unendlich konvergiert für x gegen Unendlich, und man schreibt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Analog führt man die Schreibweisen

$$\lim_{x \infty} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \text{ bzw. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

ein.

Beispiel: Für alle $a, \alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty.$$

Zu den eigentlichen Grenzwerten vom Typ $x \downarrow x_0$ oder $x \uparrow x_0$ oder $x \to \pm\infty$ und zu den uneigentlichen Grenzwerten gelten Bemerkungen zur Terminologie sowie Äquivalenzen zur Folgensprache analog zu oben. Zu allen Grenzwertbegriffen von Funktionen gelten ferner Rechenregeln analog zu denen für Folgen, wie sie in Kapitel 3.1 beschrieben sind.

9 Stetige Funktionen

In diesem Kapitel ist X wieder eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wenn insbesondere X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein soll, so wird das speziell erwähnt.

Stetigkeit: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt stetig in einem Punkt $x_0 \in X$, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X : \ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt stetig, wenn sie stetig in jedem $x_0 \in X$ ist.

Bemerkung zur Terminologie: Wenn $x_0 \in X$ nicht Häufungspunkt von X ist, d.h. wenn ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ gilt $|x - x_0| > \delta$, dann ist jede Funktion $f : X \to \mathbb{C}$

stetig in x_0. Wenn aber $x_0 \in X$ Häufungspunkt von X ist, dann ist eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ stetig in x_0 genau dann, wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Stetigkeit und algebraische Operationen: Es seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die stetig in einem Punkt in $x_0 \in X$ sind. Dann gilt:

(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in x_0 stetig.

(ii) Es sei $g(x_0) \neq 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| \leq \delta$ gilt $g(x) \neq 0$. Ferner ist die Funktion f/g (die auf der Menge $\{x \in X : |x-x_0| \leq \delta\}$ korrekt definiert ist) stetig in x_0.

Stetigkeit und Superposition: Es sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die stetig in einem Punkt $x_0 \in X$ ist, und $g : f(X) \to \mathbb{C}$ sei stetig in dem Punkt $f(x_0)$. Dann ist die Superposition $g \circ f$ ebenfalls stetig in x_0.

Gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen: Es sei $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f auch stetig. Insbesondere sind Potenzreihen stetig (als Funktionen auf ihrem Konvergenzkreis).

Zwei prominente unstetige Funktionen: (i) Unstetig in $x = 0$ ist die **Signum-Funktion** $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ 1 & \text{für} \quad x > 0. \end{cases}$$

(ii) Unstetig in allen $x \in \mathbb{N}$ ist die **Funktion "Ganzer Anteil"**, die definiert ist durch

$$x \in [0, \infty) \mapsto [x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : \ n \leq x\}.$$

9.1 Stetige Funktionen auf Intervallen. Der Zwischenwertsatz

Zwischenwertsatz: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$) und y_0 eine reelle Zahl mit $f(a) < y_0 < f(b)$ (bzw. $f(a) > y_0 > f(b)$). Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = y_0$.

Ein hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{R}$: Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und $\lim_{x\to\infty} = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, so ist f surjektiv. Insbesondere ist jedes Polynom ungerader Ordnung surjektiv (von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$) und besitzt folglich mindestens eine reelle Nullstelle.

Bogenzusammenhängende Mengen: Eine Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ heißt bogenzusammenhängend, wenn für beliebige $x, y \in X$ eine stetige Funktion $\varphi : [0, 1] \to X$ existiert mit $\varphi(0) = y$ und $\varphi(1) = y$.

Beispiele: $X \subseteq \mathbb{R}$ ist bogenzusammenhängend ist genau dann, wenn X ein Intervall ist.

Stetige Funktionen können ihren Definitionsbereich nicht zerreißen: Wenn $X \subseteq \mathbb{C}$ bogenzusammenhängend ist und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch die Bildmenge $f(X)$ bogenzusammenhängend.

9.2 Stetigkeit und Monotonie

Monotonie und strenge Monotonie: Es sei $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \leq x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$). Die Funktion f heißt streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend), wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$).

Stetigkeit und Monotonie auf Intervallen: Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt:
(i) Wenn f stetig und injektiv ist, so ist f streng monoton.
(ii) Wenn f streng monton ist, so ist f^{-1} stetig.

Beispiel: Für jedes $a > 0$ ist die Logarithmus-Funktion $x \in (0, \infty) \mapsto \log_a x \in \mathbb{R}$ stetig, weil die Exponentialfunktion $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \in (0, \infty)$ streng monoton ist.

Gegenbeispiele: (i) Es sei $f : [-1, 0] \cup (1, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -x & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x & \text{für} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Dann ist f stetig, injektiv, aber nicht monoton, und der Definitionsbereich von f ist kein Intervall. Wegen $f([-1, 0] \cup (1, 2]) = [0, 2]$ ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} ein Intervall, aber f^{-1} ist unstetig im Punkt Eins.

(ii) Es sei $X := \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \; 0 < r \leq 1, 0 \leq \varphi < \pi\}$, und $f : X \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) := z^2$. Dann ist f stetig und injektiv, X ist bogenzusammenhängend, und trotzdem ist die Umkehrfunktion f^{-1} unstetig: Für $n \to \infty$ gilt

$$f(e^{i(\pi-1/n)}) = e^{2i(\pi-1/n)} = e^{-2i/n} \to 1 = f(1), \text{ aber } e^{i(\pi-1/n)} \to e^{i\pi} = -1 \neq 1.$$

9.3 Stetige Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Mengen

Beschränkte Mengen: Die Menge X heißt beschränkt, wenn ein $c > 0$ existiert so dass für alle $x \in X$ gilt $|x| \leq c$.

Abgeschlossene Mengen: Die Menge X heißt abgeschlossen, wenn sie jeden ihrer Häufungspunkte enthält, d.h. wenn für jede konvergente Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ gilt, dass ihr Grenzwert ebenfalls in X liegt.

Extrema stetiger Funktionen auf abgeschlossenen beschränkten Mengen: Wenn X abgeschlossen und beschränkt ist und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, so ist die Bildmenge $f(X)$ ebenfalls abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere, wenn $f(X) \subset \mathbb{R}$, so besitzt $f(X)$ ein Maximum und ein Minimum.

Gleichmäßige Stetigkeit: Wenn X abgeschlossen und beschränkt ist und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, x_0 \in X : \; |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \tag{9.1}$$

Eine Funktion, die (9.1) erfüllt, heißt gleichmäßig stetig.

10 Differenzierbare Funktionen

In diesem Kapitel ist X wieder eine Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wenn insbesondere X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein soll, so wird das speziell erwähnt.

10.1 Differenzierbarkeit und Ableitung

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt **differenzierbar in einem Punkt** $x_0 \in X$, wenn x_0 ein Häufungspunkt von X ist und der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn sie differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in X$ ist. Die Funktion $x \in X \mapsto f'(x) \in \mathbb{C}$ heißt dann Ableitung von f und wird mit f' bezeichnet.

Interpretationen: (i) **Tangenten an den Graphen:** Wenn $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in X$ ist, so existiert genau eine Gerade $y = ax + b$ in $\mathbb{R}^2$, so daß gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - ax - b}{x - x_0} = 0. \tag{10.1}$$

Dabei sind die reellen Koeffizienten a und b bestimmt durch

$$a = f'(x_0) \text{ und } b = f(x_0) - f'(x_0)x_0. \tag{10.2}$$

Diese Gerade heißt Tangente an die Kurve $y = f(x)$ (d.h. an den Graphen von f) im Punkt $(x_0, f(x_0))$, und die reelle Zahl $f'(x_0)$ heißt Anstieg der Kurve in x_0.

(ii) **Tangenten an die Bildmenge:** Wenn $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in X$ ist mit $f'(x_0) \neq 0$, so existiert genau eine Gerade $y = ax + b$ in $\mathbb{C}$, so daß (10.1) gilt. Dabei sind die komplexen Koeffizienten a und b bestimmt durch (10.2). Diese Gerade heißt Tangente an die Kurve $y = f(x)$ (d.h. an die Bildmenge von f) im Punkt $f(x_0)$, und die komplexe Zahl $f'(x_0)$ heißt Tangentialvektor an die Kurve in $f(x_0)$.

(iii) **Lokale affine Approximation:** Wenn $f : X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in X$ ist, so existiert genau eine affine Abbildung $x \in \mathbb{C} \mapsto ax + b \in \mathbb{C}$, so daß (10.1) gilt. Dabei sind die komplexen Koeffizienten a und b bestimmt durch (10.2). Diese affine Abbildung heißt lokale affine Approximation der Funktion f im Punkt x_0.

Beispiel: Archimedische Spirale Die Kurve $\{xe^{ix} : x \in [0, \infty)\}$ heißt Archimedische Spirale. Sie schneidet die imaginäre Achse in den Punkten $i(-1)^k(\pi/2 + k\pi),\ k \in \mathbb{N}$. Tangentenvektoren an die Kurve in diesen Punkten sind

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{ix}\right]_{x=\pi/2+k\pi} = \left[e^{ix}(1 + ix)\right]_{x=\pi/2+k\pi} = (-1)^k \left(i - \pi/2 - k\pi\right).$$

Je größer k ist, desto kleiner ist der Winkel dieser Tangentialvektoren zur positiven (falls k ungerade ist) bzw. zur negativen (falls k gerade ist) reellen Halbachse.

Verhältnis von Stetigkeit und Differenzierbarkeit Wenn $f : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0 \in X$ ist, so ist f in x_0 auch stetig. Aber es existieren stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nirgends differenzierbar sind.

10.2 Rechenregeln

Differenzierbarkeit und algebraische Operationen: Es seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, die differenzierbar in einem Punkt in $x \in X$ sind. Dann gilt:

(i) Die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ sind ebenfalls in x differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \text{ und } (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

(ii) Es sei $g(x) \neq 0$. Dann ist die Funktion f/g (die für $y \in X$ nahe x korrekt definiert ist) differenzierbar in x, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Kettenregel: Es seien $f : X \to Y \subseteq \mathbb{C}$ differenzierbar in $x \in X$ und $g : Y \to \mathbb{C}$ differenzierbar in $f(x)$. Dann ist auch die Superposition $g \circ f$ differenzierbar in x, und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Ableitung der inversen Funktion: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{K}$, $f : X \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \in X$, und $f'(x_0) \neq 0$, dann gilt:

(i) Wenn f injektiv ist und wenn f^{-1} stetig in $f(x_0)$ ist, so folgt

$$f^{-1} \text{ ist differenzierbar in } f(x_0) \text{ und } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{10.3}$$

(ii) Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist und X ein Intervall ist und wenn f streng monoton ist, so ist f injektiv, und f^{-1} ist stetig, und folglich gilt wieder (10.3).

(iii) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \varepsilon\} \subseteq X$, wenn f in $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \varepsilon\}$ differenzierbar ist und wenn f' in x_0 stetig ist, so existiert ein $\delta \in (0, \varepsilon)$ so dass die Einschränkung von f auf $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < \delta\}$ injektiv ist, und f^{-1} ist stetig in $f(x_0)$, und folglich gilt wieder (10.3).

Beispiel Die Funktion $f(x) = e^x + x$ ist streng monoton und differenzierbar, und es gilt $f'(x) = e^x + 1 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folglich kann man $\left(f^{-1}\right)'(y)$ nach (10.3) berechnen in allen $y \in \mathbb{R}$, in denen $f^{-1}(y)$ bekannt ist (obwohl f^{-1} keine elementare Funktion ist). Zum Beispiel ist $f(0) = 1$, also

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \left[\frac{1}{e^x + 1}\right]_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Mittelwertsatz (Abschätzung von Zuwächsen): (i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert ein $\theta \in (a, b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\theta)(b - a).$$

(ii) Es sei $f : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar, f' sei stetig, und es seien Punkte $a, b \in X$ gegeben so dass die Strecke $\{(1 - \theta)a + \theta b : 0 \leq \theta \leq 1\}$ in X liegt. Dann gilt

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 1} |f'((1 - \theta)a + \theta b)||b - a|.$$

Beispiel: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f(x) := e^{ix}$ ist differenzierbar, und ihre Ableitung $f'(x) = ie^{ix}$ ist stetig. Es existiert kein $c \in (0, 2\pi)$ mit $0 = f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(c) = 2\pi i e^{ic}$. Aber es gilt für alle $x \leq y$

$$|e^{ix} - e^{iy}| = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2} \leq \max_{x \leq z \leq y} |ie^{iz}||x - y| = |x - y|.$$

Vertauschbarkeit von Grenzwert und Differentiation: Es sei $f_1, f_2, \ldots : X \to \mathbb{C}$ eine Folge differenzierbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ strebe, und die Folge (f_n') der Ableitungen strebe gleichmäßig gegen eine Funktion $g : X \to \mathbb{C}$. Dann ist f differenzierbar, und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\left(\lim_{n \to \infty} f_n \right)' = \lim_{n \to \infty} f_n'.$$

Ableitung von Potenzreihen: Es sei $\sum a_j (x - x_0)^j$ eine Potenzreihe mit einem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist diese Potenzreihe eine differenzierbare Funktion in ihrem Konvergenzkreis $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < R\}$, die summandenweise differenzierte Potenzreihe $\sum j a_j (x - x_0)^{j-1}$ besitzt ebenfalls den Konvergenzradius R, und es gilt

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \right)' = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (x - x_0)^{j-1} \text{ für } |x - x_0| < R.$$

10.3 Höhere Ableitungen. Der Satz von Taylor

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ heißt n-fach differenzierbar, wenn f $(n-1)$-fach differenzierbar ist und wenn die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist. Die Ableitung dieser $(n-1)$-ten Ableitung wird n-te Ableitung von f genannt und mit $f^{(n)}$ bezeichnet, also

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)} \right)'.$$

Krümmung: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar in $x_0 \in X$ mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$. Dann existiert genau ein Kreis $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2\}$ mit $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ und $r > 0$, so daß gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \eta + \sqrt{r^2 - (x - \xi)^2}}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Dabei gilt $\xi = x_0$, $\eta = f(x_0) + \mathrm{sgn} f''(x_0) r$ und

$$|f''(x_0)| = \frac{1}{r},$$

und diese Zahl heißt Krümmung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Coriolis-Beschleunigung: Es sei $t \in \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{C}$ eine zweifach differenzierbare Abbildung. Dabei sei $x(t)$ der Ort zum Zeitpunkt t eines sich in einer Ebene E_1 (die mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird) bewegenden Teilchens. Ferner drehe sich die Ebene E_1 um ihren Nullpunkt relativ zu einer unbewegten Ebene E_2 (die ebenfalls mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird) mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}$, d.h. $e^{i\omega t}x$ ist der Ort in E_2, in den ein Ortspunkt $x \in E_1$ nach der Zeit t gedreht worden ist. Die überlagerte Bewegung des Teilchens ist dann $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\omega t}x(t) \in \mathbb{C}$, und die entsprechende Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 0$

$$\left(e^{i\omega t}x(t)\right)'' |_{t=0} = -\omega^2 x(0) + 2i\omega x'(0) + x''(0)$$

setzt sich aus drei Summanden zusammen: $-\omega^2 x(0)$ ist die Beschleunigung, die das Teilchen erfahren würde, wenn es sich nicht relativ zu E_1 bewegen würde, $x''(0)$ ist die Beschleunigung, die das Teilchen erfahren würde, wenn sich E_1 nicht relativ zu E_2 bewegen würde, und $2i\omega x'(0)$ ist die sogenannte Coriolis-Beschleunigung.

Leibnitz-Formel: Es seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ n-fach differenzierbar in $x \in X$. Dann gilt

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) g^{(n-j)}(x).$$

Taylor-Formel und Taylor-Reihe: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Wenn f n-fach differenzierbar ist, so existiert für beliebige $x, x_0 \in I$ ein θ zwischen x und x_0, so daß gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n)}(\theta)}{n!}(x - x_0)^n.$$

(ii) Wenn f beliebig oft differenzierbar ist und wenn ein $c > 0$ existiert mit $|f^{(n)}(\theta)| \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\theta \in I$, so gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j \text{ für alle } x \in I.$$

Analytische Funktionen: (i) Es sei $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und für jedes $x_0 \in X$ existiere ein $r > 0$ mit $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \subseteq X$ und eine Folge $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j \text{ für } |x - x_0| < r. \tag{10.4}$$

Dann heißt f **reell-analytisch**, und es gilt

$$a_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}. \tag{10.5}$$

(ii) Es sei $f : X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, und für jedes $x_0 \in X$ existiere ein $r > 0$ mit $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\} \subseteq X$ und eine Folge $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ mit (10.4). Dann heißt f **komplex-analytisch**, und es gilt wieder (10.5).

Verhältnis von Differenzierbarkeit und Analytizität: (i) Jede reell-analytische oder komplex-analytische Funktion ist beliebig oft differenzierbar.

(ii) Es sei $f : X \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, und für jedes $x_0 \in X$ existiere ein $r > 0$ mit $\{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < r\} \subseteq X$. Dann ist f komplex-analytisch.

Beispiele: (i) Die Funktion $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := |x|^{3/2} \in \mathbb{R}$ ist einmal differenzierbar und f' ist stetig, aber f ist nicht zweimal differenzierbar.

(ii) Die Funktion

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar, aber nicht reell-analytisch.

(iii) Die Funktion $x + iy \in \mathbb{C} \mapsto x - iy \in \mathbb{C}$ ist nirgends differenzierbar.

10.4 Anwendungen

Regel von l'Hospital: Es seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq A \leq \infty$, und $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien zwei differenzierbare Funktionen. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, und für ein $a \leq c \leq b$ gelte

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

sowie

$$\text{entweder} \quad \lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty.$$

Dann gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ nahe c und

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Kriterien für Monotonie: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

(i) Die Funktion f ist monoton wachsend (bzw. monoton fallend) genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ gilt.

(ii) Wenn $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) gilt für alle $x \in I$, dann ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Lokale Extrema: Es seien $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und $x_0 \in X$.

(i) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$), so sagt man, daß f in x_0 ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum) besitzt.

(ii) Wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ gilt $f(x) < f(x_0)$ (bzw.$f(x) > f(x_0)$), so sagt man, daß f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. strenges lokales Minimum) besitzt.

Kriterien für lokale Extrema: (i) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $X \subseteq \mathbb{K}$, $f : X \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar in $x_0 \in X$, f besitze in x_0 ein lokales Extremum, und es existiere ein $r > 0$ mit $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < r\} \subseteq X$. Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

(ii) Wenn $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist und eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar ist und wenn in einem Punkt $x_0 \in I$ gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$), dann ist x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. ein strenges lokales Minimum) von f.

Kriterien für Konvexität und Konkavität: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Die Funktion f heißt konvex (bzw. streng konvex bzw. konkav bzw. streng konkav), wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ und für alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \tag{10.6}$$

(bzw. (10.6) mit $<$ bzw. (10.6) mit $\geq$ bzw. (10.6) mit $>$).

(ii) Wenn f zweifach differenzierbar ist, so gilt: f ist konvex (bzw. konkav) genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) \leq 0$) für alle $x \in I$ ist.

(iii) Wenn f zweifach differenzierbar ist und wenn $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) gilt für alle $x \in I$, dann ist f streng konvex (bzw. streng konkav).

Newton-Verfahren: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar mit $f(a) > 0$ und $f(b) <$ und

$$m := \min\{f'(x) : \ x \in [a, b]\}, \ \ M := \max\{f''(x) : \ x \in [a, b]\}.$$

Ferner sei $f'(x) < 0$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ genau eine Lösung $x_0 \in [a, b]$, und die Folge

$$x_1 := a, \ x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

konvergiert monoton wachsend gegen x_0 und

$$\|x_{k+1} - x_0\| \leq \frac{M}{2m}\|x_k - x_0\|^2. \tag{10.7}$$

Wegen (10.7) sagt man, dass die Folge der Approximationen $x_1, x_2, \ldots$ quadratisch gegen die Lösung x_0 konvergiert.

11 Integrierbare Funktionen

11.1 Integrierbarkeit und bestimmtes Integral

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn ein $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ existiert, so daß folgendes gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle **Zerlegungen** $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ von $[a, b]$ mit $\max\{x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}\} < \delta$ und für alle $\xi_1 \in (x_0, x_1), \ldots, \xi_n \in (x_n, x_{n-1})$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \mathcal{I} \right| < \varepsilon.$$

Die Zahl $\mathcal{I}$ (die dann durch die obige Bedingung eindeutig bestimmt ist) heißt Integral von f über $[a, b]$, und man schreibt

$$\int_a^b f(x)dx := \mathcal{I}.$$

Die Summe $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ heißt **Riemannsche Summe** der Funktion f zur Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und zu den **Zwischenwerten** $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Integrierbare Funktionen sind beschränkt: Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar ist, so existiert ein $c > 0$ mit

$$|f(x)| \le c \text{ für alle } x \in [a, b]. \tag{11.1}$$

Funktionen, die die Bedingung (11.1) erfüllen, heißen beschränkt.

Beschränkte Funktionen sind integrierbar, wenn sie "fast überall" stetig sind: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen abzählbar ist.

Funktionen, die "fast überall" gleich sind, besitzen gleiche Integrale: Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränkt, und die Menge aller $x \in [a, b]$ mit $f(x) \neq g(x)$ sei abzählbar. Dann ist auch g integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

11.2 Rechenregeln

Integrierbarkeit und Linearkombinationen: Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, und die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ seien integrierbar. Dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b \Big(\lambda f(x) + \mu g(x)\Big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Integrierbarkeit auf Teilintervallen: Es sei $a \le b \le c$. Dann ist eine Funktion $f : [a, c] \to \mathbb{C}$ integrierbar genau dann, wenn ihre Einschränkungen auf $[a, b]$ und auf und $[b, c]$ integrierbar sind, und dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \tag{11.2}$$

Integration von Ungleichungen: Wenn zwei Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar sind und wenn für alle $x \in [a, b]$ gilt $f(x) \le g(x)$, so gilt auch

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx. \tag{11.3}$$

Integralabschätzungen: Wenn eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar ist, so gilt

$$\inf\{f(x) : x \in [a, b]\}(b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}(b - a). \tag{11.4}$$

Ferner ist dann auch die Funktion $|f|$ integrierbar, und es gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|dx. \tag{11.5}$$

Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration: Es sei $f_1, f_2, \ldots : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Folge integrierbarer Funktionen, die bei $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ strebe. Dann ist f ebenfalls integrierbar, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

11.3 Stammfunktionen und Integrationsregeln. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, F : I \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, F sei differenzierbar, und es gelte $F' = f$. Dann heißt F **Stammfunktion** von f. Die Menge aller Stammfunktionen von f (d.h. die Menge aller Funktionen der Art $F + c$, wobei c eine Konstante ist) wird bisweilen auch unbestimmtes Integral von f genannt und mit $\int f(x)dx$ bezeichnet.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: (i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar, und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{11.6}$$

(ii) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $x \in [a, b] \mapsto \int_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion von f, d.h. es gilt

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y)dy = f(x) \text{ für alle } x \in [a, b]. \tag{11.7}$$

Vertauschung der Intervallgrenzen: Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $a \leq c \leq d \leq b$. Dann bezeichnet man

$$\int_d^c f(x)dx := -\int_c^d f(x)dx.$$

Diese Bezeichnung ist sinnvoll, weil mit ihrer Hilfe die Rechenregeln (11.2), (11.6) und (11.7) oder die unten folgenden (11.8) und (11.9) gelten unabhängig davon, ob in den auftretenden Integralen die untere Integrationsgrenze größer ist als die obere oder nicht. Ferner können mit dieser Bezeichnung die folgenden zwei Rechenregeln formuliert werden, in denen möglicherweise Integrale auftreten, in denen die untere Integrationsgrenze größer ist als die obere. Allerdings gelten einige Rechenregeln nur wenn die untere Integrationsgrenze kleiner oder gleich der oberen ist, z.B. (11.4) und (11.5).

Parameterabhängige Integrationsgrenzen: Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $\varphi, \psi : J \to I$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $x \in J \mapsto \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(y)dy = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x). \tag{11.8}$$

Substitutionsregel: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, und $g : [c, d] \to [a, b]$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. und es gelte $g(c) = a$ und $g(d) = b$. Dann folgt

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(y))g'(y)dy. \tag{11.9}$$

Partielle Integration: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann folgt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Partialbruchzerlegung: Es seien P bzw. Q zwei Polynome (mit reellen Koeffizienten und der reellen unabhgigen Variablen x) vom Grad m bzw. n, und es gelte

$$Q(x) = (x - a_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{p_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + b_l x + c_l)^{q_l} \tag{11.10}$$

mit $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $p_j, q_j \in \mathbb{N}$, $p_1 + \ldots p_k + 2\,(q_1 + \ldots q_l) = n$ und $b_j^2 < 4c_j$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \alpha_{m-n} x^{m-n} + \alpha_{m-n-1} x^{m-n-1} + \ldots + \alpha_0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{p_i} \frac{\beta_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} \frac{\gamma_{ij} x + \delta_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \end{aligned} \tag{11.11}$$

mit gewissen reellen Koeffizienten α_i, β_{ij}, γ_{ij} und δ_{ij}, und diese sind durch (11.11) eindeutig bestimmt. Im Fall $m > n$ gilt $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-n} = 0$. Die Gleichung (11.10) heißt Primzerlegung der Polynoms Q. Sie besagt, dass a_j die reellen Nullstellen von Q sind, dass diese die Vielfachheiten p_j besitzen, dass $-b_j/2 \pm \sqrt{b_j^2/4 - c_j}$ die nicht-reellen Nullstellen von Q sind, und dass diese die Vielfachheiten q_j besitzen. Die Gleichung (11.11) heißt Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion P/Q. Um eine Stammfunktion der rechten Seite von (11.11) zu finden benutzt man die Formeln

$$\frac{\beta_{ij}}{(x - a_i)^j} = \left(-\frac{1}{j-1} \frac{\beta_{ij}}{(x - a_i)^{j-1}} \right)' \text{ für } j \neq 1, \quad \frac{\beta_{ij}}{x - a_i} = (\beta_{ij} \ln(x - a_i))'$$

und

$$\frac{\gamma_{ij} x + \delta_{ij}}{x^2 + b_i x + c_i} = \left(\frac{\gamma_{ij}}{2} \ln |x^2 + b_i x + c_i| + \frac{\delta_{ij} - \gamma_{ij} b_i/2}{\sqrt{c_i - b_i^2/4}} \arctan \frac{x + b_i/2}{\sqrt{c_i - b_i^2/4}} \right)'.$$

Eine elementare Stammfunktion für

$$\frac{\gamma_{ij} x + \delta_{ij}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j} \text{ mit } j \neq 1$$

zu finden ist schwieriger.

11.4 Numerische Integration

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + (j-1)\frac{b-a}{n} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbar ist, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + 2f\left(a + \frac{b-a}{n} \right) + \ldots + 2f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n} \right) + f(b) \right) \right| \leq \\ &\qquad \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad \textbf{(Trapezregel)}. \end{aligned}$$

11.5 Uneigentliche Integrale

In diesem Unterkapitel erweitern wir den Begriff der Integrierbarkeit auf Funktionen, die möglicherweise nicht beschränkt sind und/oder die möglicherweise auf einem unendlichen Intervall definiert sind.

Eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$ heißt **uneigentlich integrierbar** auf $[a, b)$, wenn für jedes $c \in [a, b)$ die Einschränkung $f|_{[a,c]}$ eigentlich integrierbar ist und wenn der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f(x)dx$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann uneigentliches Integral von f auf $[a, b)$. Analog definiert man die uneigentliche Integrierbarkeit und das uneigentliche Integral für Funktionen $f : (a, b] \to \mathbb{C}$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$.

Eine Funktion $f : [a, b) \cup (b, c] \to \mathbb{C}$ mit $-\infty < a < b < c < \infty$ heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, c]$, wenn f auf $[a, b)$ und auf $(b, c]$ uneigentlich integrierbar ist, und man schreibt dann

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Der Begriff des uneigentlichen Integrals ist eine Erweiterung des Begriffs des eigentlichen Integrals in folgendem Sinn: Es sei $-\infty < a < b < \infty$, und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei eigentlich integrierbar. Dann ist (die Einschränkung auf $[a, b)$ von) f uneigentlich integrierbar auf $[a, b)$, und das eigentliche und das uneigentliche Integral sind gleich.

Beispiele: (i) Die Funktion $x \in [1, \infty) \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ ist uneigentlich integrierbar genau dann, wenn $\alpha < -1$ ist, und dann gilt

$$\int_1^\infty x^\alpha dx = \lim_{c \to \infty} \int_1^c x^\alpha dx = \lim_{c \to \infty} \frac{c^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1} = -\frac{1}{\alpha + 1}.$$

(ii) Die Funktion $x \in (0, 1] \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ ist uneigentlich integrierbar genau dann, wenn $\alpha > -1$ ist, und dann gilt

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \lim_{c \downarrow 0} \int_c^1 x^\alpha dx = \lim_{c \downarrow 0} \frac{1 - c^{\alpha+1}}{\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

(iii) Die Funktion $x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ ist nicht uneigentlich integrierbar, weil die Funktion $x \in (0, 1] \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$ nicht uneigentlich integrierbar ist. Trotzdem existiert der Grenzwert

$$\lim_{c \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-c} \frac{dx}{x} + \int_c^1 \frac{dx}{x} \right) = 0.$$

Cauchy-Kriterium: Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$, und die Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{C}$ sei für jedes $c \in [a, b)$ eigentlich integrierbar auf $[a, c]$, dann gilt: f ist uneigentlich h integrierbar auf $[a, b)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists c \in [a, b) \; \forall c \leq c_1 \leq c_2 < b : \quad \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $[1, \infty)$ uneigentlich integrierbar weil

$$\left|\int_{c_1}^{c_2} \frac{\sin x}{x} dx\right| = \left|-\int_{c_1}^{c_2} \frac{\cos x}{x^2} dx - \left[\frac{\cos x}{x}\right]_{x=c_1}^{x=c_2}\right| \leq \int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{2}{c_1} \to 0 \text{ for } c_1 \to 0.$$

Ein Rechentrick: Feynman-Parameter Manchmal kann man uneigentliche Integrale analytisch ausrechnen indem man künstlich einen zusätzlichen Parameter einführt. Weil dieser Trick bisweilen dem Physik-Nobelpreisträger Richard Feynman zugeschrieben wird, werden diese zusätzlichen Parameter bisweilen Feynman-Parameter genannt. Zum Beispiel, um das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ zu berechnen betrachtet man die Familie

$$I(\lambda) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

von uneigentlichen Integralen, die durch den zusätzlichen Parameter $\lambda \geq 0$ parametrisiert ist. Wenn man weiß, dass die Operationen "Uneigentliches Integrieren nach x" und "Differenzieren nach λ"vertauscht werden dürfen, so ergibt sich

$$I'(\lambda) = -\int_0^\infty \sin x e^{-\lambda x} dx \text{ für } \lambda > 0.$$

Dieses Integral kann man durch zweifaches partielles Integrieren berechnen, und man erhält

$$I'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}, \text{ d.h. } I(\lambda) = -\arctan \lambda + \text{const für } \lambda > 0.$$

Wegen

$$|I(\lambda)| = \left|\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx\right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \to 0 \text{ for } \lambda \to \infty$$

ist die Konstante gleich $\pi/2$, also $I(\lambda) = -\arctan \lambda + \pi/2$ für $\lambda > 0$. Wenn man ferner weiß, dass die Operationen "Uneigentliches Integrieren nach x" und "Grenzwert $\lambda \downarrow 0$"vertauscht werden dürfen, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Unter welchen Bedingungen man weiß, dass die Operationen vertauscht werden dürfen, das wird in "Analysis II" behandelt. Im obigen Fall darf man es, im allgemeinen darf man es nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Es gilt

$$\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda^2 x} dx = \lim_{c \to \infty} \left[-e^{-\lambda^2 x}\right]_{x=0}^{x=c} = 1 \text{ für } \lambda \neq 0$$

und

$$\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda^2 e^{-\lambda^2 x}\right]_{\lambda=0} dx = \int_0^\infty \left[2\lambda e^{-\lambda^2 x} - 2\lambda^3 e^{-\lambda^2 x}\right]_{\lambda=0} = 0.$$

Mit anderen Worten: Für die Funktion $f(\lambda, x) := \lambda^2 e^{-\lambda^2 x}$ gilt

$$\lim_{\lambda \to 0} \int_0^\infty f(\lambda, x) dx = 0 \neq 1 = \int_0^\infty \lim_{\lambda \to 0} f(\lambda, x) dx,$$

und

$$\int_0^\infty \frac{d}{d\lambda}[f(\lambda,x)]dx \text{ existiert in } \lambda=0, \text{ aber } \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty f(\lambda,x)dx \text{ existiert nicht in } \lambda=0.$$

Majoranten-Kriterium: Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$, die Funktion $f : [a,b) \to \mathbb{C}$ sei für jedes $c \in [a,b)$ eigentlich integrierbar auf $[a,c]$, die Funktion $g : [a,b) \to [0,\infty)$ sei uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$, und es gelte

$$|f(x)| \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a,b).$$

Dann sind auch die Funktionen f und $|f|$ uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$, und es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Die Funktion f heißt dann absolut uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist auf $[1,\infty)$ uneigentlich integrierbar (siehe oben) aber nicht absolut uneigentlich integrierbar weil

$$\begin{aligned}\int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &= \sum_{j=1}^{k-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{(j+1)\pi}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}|\sin x|\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j+1} \to \infty \text{ für } k \to \infty.\end{aligned}$$

Grenzwert-Kriterium: Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$, die Funktion $f : [a,b) \to [0,\infty)$ und $f : [a,b) \to (0,\infty)$ seien für jedes $c \in [a,b)$ eigentlich integrierbar, und

$$\lim_{x\uparrow b}\frac{f(x)}{g(x)} =: h$$

existiere. Dann gilt:

(i) Es sei $h > 0$. Dann ist f ist uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$ genau dann, wenn g uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$ ist.

(ii) Es sei $h = 0$. Dann ist f ist uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$, wenn g uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$ ist.

11.6 Anwendungen

Längen von Wegen: Eine Abbildung $t \in [a,b] \mapsto x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ heißt Weg in $\mathbb{R}^n$. Der Weg heißt rektifizierbar, wenn gilt

$$L := \sup\left\{\sum_{j=1}^m \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(t_j)-x_k(t_{j-1}))^2} :\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b\right\} < \infty,$$

und L heißt dann Länge des Weges. Im Fall $n = 2, x_1(t) = t$ ist die Länge des Weges gleich der in 6.1 eingeführten Bogenlänge der Kurve $s = x_2(t), t \in [a, b]$.
Wenn alle Komponentenfunktionen $x_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, so ist der Weg rektifizierbar, und es gilt

$$L = \int_a^b \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k'(t)^2 dt}.$$

Die Länge L hängt von der Abbildung $t \mapsto x(t)$ ab und nicht nur von ihrer Bildmenge $\{x(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [a, b]\}$, deshalb spricht man von der Länge von Wegen und nicht von der Länge von Kurven. Zum Beispiel haben die Wege $t \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ und $t \in [0, 4\pi] \mapsto (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ die gleichen Bildmengen, ihre Weglängen sind aber 2π und 4π, also verschieden. Andererseits hängt L hängt von der Abbildung $t \mapsto x(t)$ nur "bis auf Parametrisierung" ab: Wenn $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ bijektiv ist, so besitzen die Wege $t \in [a, b] \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ und $t \in [c, d] \mapsto x(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^n$ gleiche Längen (wenn sie beide rektifizierbar sind).

Beispiel: Pendelperiode Die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t)$$

beschreibt das zeitliche Verhalten eines ebenen Pendels ($t \in \mathbb{R}$ ist die Zeit, $x(t)$ ist der Ausschlagwinkel des Pendels, $g > 0$ ist die Erdbeschleunigung, und $l > 0$ ist die Länge des Pendels). Jede Lösung dieser Differentialgleichung erfüllt das Energieerhaltungsgesetz

$$\frac{1}{2} x'(t)^2 - \frac{g}{l} \cos x(t) = \text{ const bzgl. } t. \tag{11.12}$$

Wenn die Anfangsauslenkung $x(0) = -\xi \in (-\pi, 0)$ gegeben ist und die Anfangswinkelgeschwindigkeit $x'(0) = 0$ ist, so folgt aus (11.12)

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x(t) - \cos \xi)}} = 1. \tag{11.13}$$

Es sei $T_\xi > 0$ die Periode der Schwingung zu den gegebenen Anfangsbedingungen. Wenn man (11.13) von Null bis $T_\xi/2$ bzgl. t integriert, so folgt (durch Substitution $y = x(t)$ im Integral)

$$T_\xi = 2 \int_0^{T_\xi/2} \frac{x'(t)}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos x(t) - \cos \xi)}} dt = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos \xi}}. \tag{11.14}$$

Die uneigentlichen Integrale in (11.14) konvergieren nach den Grenzwert-Kriterium, weil die Vergleichsfunktion $y \in (-\xi, \xi) \mapsto (\xi - y)^{-1/2} \in \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar ist und weil gilt

$$\lim_{y \uparrow \xi} \frac{\frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos \xi}}}{\frac{1}{\sqrt{\xi - y}}} = \sqrt{\lim_{y \uparrow \xi} \frac{\xi - y}{\cos y - \cos \xi}} = \sqrt{\frac{1}{\sin \xi}} > 0.$$

Im Fall $\xi = \pi$ divergieren die uneigentlichen Integrale in (11.14), weil die Vergleichsfunktion $y \in (-\pi, \pi) \mapsto (\pi - y)^{-1} \in \mathbb{R}$ nicht uneigentlich integrierbar ist und weil gilt

$$\lim_{y \uparrow \pi} \frac{\frac{1}{\sqrt{\cos y + 1}}}{\frac{1}{\pi - y}} = \sqrt{\lim_{y \uparrow \pi} \frac{(\pi - y)^2}{\cos y + 1}} = \sqrt{2} > 0.$$

Wegen

$$\int_{-\xi}^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{\cos y - \cos \xi}} \geq \int_{-\xi}^{\xi} \frac{dy}{\sqrt{\cos y + 1}} \stackrel{\xi \uparrow \pi}{\longrightarrow} \infty$$

folgt $T_\xi \to \infty$ für $\xi \uparrow \pi$.

12 Konvergenz in metrischen Räumen

Eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen $x \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|x_n - x| \leq \varepsilon. \tag{12.1}$$

Diesen zentralen Begriff der Analysis kann man auf Folgen von Elementen einer beliebigen Menge verallgemeinern, wenn man zwei beliebigen Elementen y und z dieser Menge einen "Abstand" $\rho(y, z)$ zuordnen kann. Mann muß dann nur (12.1) durch

$$\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$$

ersetzen. Das ist der Gegenstand dieses Kapitels.

12.1 Metriken

Der Begriff "Metrik auf einer Menge" ist eine Verallgemeinerung des Begriffs "Euklidischer Abstand zwischen Punkten in $\mathbb{R}^n$". Dabei wird nur die eine Eigenschaft des $\mathbb{R}^n$, dass man zwei Punkten einen Abstand zuordnen kann, zur Kenntnis genommen und abstrahiert, während andere Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ (z.B. dass zwei Vektoren eine Summe zuordnen kann, dass man einen Vektor mit einem Skalar multiplizieren kann, dass man im Fall $n = 1$ eine Ordnung einführen kann) vernachlässigt werden.

In Anwendungen ist es oft sinnvoll, nicht nur zwei Zahlen oder zwei Zahlentupeln einen Abstand zuzuweisen, sonder z.B. auch zwei Funktionen. Die beiden Funktionen können z.B. zwei verschiedene Wärmeverteilungen in einem Körper beschreiben, und es kann eine sinnvolle Frage sein, wie weit (in einem gewissen, in der gegebenen Anwendung relevanten Sinn) die beiden Wärmeverteilungen, d.h. die beiden entsprechenden Zustände des Körpers, voneinander entfernt sind.

Definition: Es seien X eine Menge und $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ eine Abbildung, so dass für all $x, y, z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} &\quad \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ \text{Symmetrie:} &\quad \rho(x,y) = \rho(y,x), \\ \text{Dreiecksungleichung:} &\quad \rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z). \end{aligned}$$

Dann heißt ρ **Metrik** auf X, und das Paar (X, ρ) heißt **metrischer Raum**.

Beispiele: (i) Standard-Metrik in $\mathbb{C}$: $X \subseteq \mathbb{C}$, $\rho_{st}(x, y) := |x - y|$
(ii) $X := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, $\rho((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) :=$ Länge der kürzesten rektifizierbaren Kurve in X (der sogenannten geodätischen Kurve) von (x_1, x_2, x_3)

nach (y_1, y_2, y_3)

(iii) Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$: $X := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\rho(x,y) := |f(x) - f(y)| \text{ mit } f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = \infty, \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ -1 & \text{für } x = -\infty. \end{cases} \tag{12.2}$$

(v) In jeder Menge X kann man die sogenannte diskrete Metrik

$$\rho(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

betrachten.

Weitere Ungleichungen: Es sei (X, ρ) ein metrischer Raum, dann gilt für alle $a, b, c, d \in X$

$$\begin{aligned} \text{Dreiecksungleichung nach unten:} \quad & |\rho(a,b) - \rho(b,c)| \leq \rho(a,c), \\ \text{Vierecksungleichung:} \quad & |\rho(a,b) - \rho(c,d)| \leq \rho(a,c) + \rho(b,d). \end{aligned}$$

Unterräume metrischer Räume: Wenn (X, ρ) ein metrischer Raum ist und Y eine Untermenge von X ist, so ist (die Einschränkung auf $Y \times Y$ von) ρ eine Metrik auf Y, und der metrische Raum (Y, ρ) heißt Unterraum von (X, ρ).

Produkte metrischer Räume: Wenn $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_n, \rho_n)$ metrische Räume sind, so kann man in $X_1 \times \ldots \times X_n$ folgende Metriken einführen:

$$\begin{aligned} \sigma_\infty((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &:= \max_{1\leq j\leq n} \rho_j(x_j,y_j), \\ \sigma_2((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)) &:= \left(\sum_{j=1}^n \rho_j(x_j,y_j)^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung für die Metrik σ_2 benötigt man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (3.7).

Durch Normen erzeugte Metriken: Es sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $x \in X \mapsto \|x\| \in [0, \infty)$ heißt Norm in X, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} \quad & \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \text{Homogenität:} \quad & \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ \text{Dreiecksungleichung:} \quad & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Dann ist durch

$$\rho(x,y) := \|x - y\|$$

eine Metrik in X gegeben, die sogenannte durch die Norm $\|\cdot\|$ erzeugte Metrik.

Beispiele für Normen in $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Euklidische Norm: } \|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2}, \tag{12.4}$$

$$\text{Maximum-Norm: } \|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty := \max_{1\leq j\leq n} |x_j|. \tag{12.5}$$

Normen in Vektorräumen stetiger Funktionen: Der Vektorraum über $\mathbb{R}$ aller stetigen Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ wird mit $C([a, b])$ bezeichnet. In $C([a, b])$ benutzt man u.a. folgende Normen:

$$\|x\|_2 := \left(\int_a^b x(t)^2 dt\right)^{1/2}, \tag{12.6}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{a \le t \le b} |x(t)|. \tag{12.7}$$

Normen im Vektorräumen integrierbarer Funktionen: Es sei X der Vektorraum über $\mathbb{R}$ aller integrierbaren Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}$. In X ist (12.7) wieder eine Norm, aber (12.6) ist keine Norm, weil die Definitheitseigenschaft nicht erfüllt ist: Zum Beispiel ist die integrierbare Funktion

$$x(t) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = a \\ 0 & \text{für} \quad x \in (a, b] \end{cases}$$

ungleich der Nullfunktion, aber $\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2} = 0$.

Welche Metriken sind durch Normen erzeugt? Es seien X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $\rho : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik in X. Diese Metrik ist durch eine Norm in X erzeugt genau dann, wenn wenn für alle $x, y, z \in X$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Translationsinvarianz:} \quad & \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y), \\ \text{Homogenität:} \quad & \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y). \end{aligned}$$

Durch Skalarprodukte erzeugte Normen: Es sei X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $(x, y) \in X \times X \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt in X, wenn für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Definitheit:} \quad & \langle x, x \rangle > 0 \text{ für } x \neq 0, \\ \text{Symmetrie:} \quad & \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \\ \text{Bilinearität:} \quad & \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Dann ist durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm in X gegeben, die sogenannte durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erzeugte Norm in X.

Euklidisches Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: Das Skalarprodukt

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j.$$

in $\mathbb{R}^n$ heißt Euklidisches Skalarprodukt, die entsprechende Norm ist die Euklidische Norm (12.4).

Senkrechtes Lot: Es sei $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Wenn die Metrik ρ durch eine Norm in $\mathbb{R}^n$ erzeugt ist und diese Norm durch ein Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ erzeugt ist, so besitzt ρ besonders gute Eigenschaften, z.B. die folgende: Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ und jeden Unterraum $V \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert genau ein $v_0 \in V$ mit

$$\rho(x, v_0) = \min_{v \in V} \rho(x, v).$$

Den Punkt v_0 nennt man dann senkrechtes Lot oder orthogonale Projektion von x auf V.

Welche Normen sind durch Skalarprodukte erzeugt? Es seien X ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm in X. Diese Norm ist durch ein Skalarprodukt in X erzeugt genau dann, wenn wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$\text{Paralellogramm-Gleichung: } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Zum Beispiel sind die Normen (12.4) und (12.6) durch Skalarprodukte erzeugt, die Normen (12.5) und (12.7) dagegen nicht.

12.2 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen

Es sei (X, ρ) ein metrischer Raum. Eine Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ heißt **konvergent**, wenn ein $x \in X$ existiert, so dass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq n_0 : \; \rho(x_n, x) \leq \varepsilon. \tag{12.8}$$

Das Element x ist durch (12.8) eindeutig bestimmt und heißt **Grenzwert** der Folge bzgl. ρ, und man schreibt $x_n \to x$ bzgl. ρ oder, wenn aus dem Kontext klar ist, welche Metrik betrachtet wird, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Die Bedingung (12.8) ist äquivalent zu

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0, \tag{12.9}$$

wobei der Grenzwert in (12.9) der Grenzwert von Zahlenfolgen im Sinn der Definition (4.1) ist. Wenn X ein Vektorraum ist und die Metrik ρ durch eine Norm $\|\cdot\|$ in X erzeugt ist, so heißt x Grenzwert der Folge bzgl. der Norm$\|\cdot\|$.

Beispiele: (i) Es seien $\rho(x, y) = |x - y|$ die Standard-Metrik in $\mathbb{R}$ und $x, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_n \to X$ bzgl. ρ_{st} genau dann, wenn $x_n \to x$ im Sinn der klassischen Definition (4.1) gilt.

(ii) Es seien ρ die Metrik (12.2) der Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ und $x, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x_n \to x$ bzgl. ρ genau dann, wenn $x_n \to x$ bzgl. ρ_{st}. Ferner gilt $x_n \to \infty$ bzgl. ρ bzw. $x_n \to -\infty$ bzgl. ρ genau dann, wenn $x_n \to \infty$ bzw. $x_n \to -\infty$ im Sinn der klassischen Definitionen (4.2) bzw. (4.3) gilt.

(iii) Es seien $\|\cdot\|_\infty$ die in (12.7) eingeführte Norm in $C([a, b])$ und $x, x_1, x_2, \ldots \in C([a, b])$. Dann gilt $x_n \to x$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau dann, wenn die Funktionenfolge $x_1, x_2, \ldots$ gleichmäßig im Sinn der Definition (6.2) gegen die Funktion x strebt.

Konvergenz bzgl. einer Norm in $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise Konvergenz: Es seien

$$(x_{11}, \ldots, x_{n1}), (x_{12}, \ldots, x_{n2}), \ldots, (x_{1j}, \ldots, x_{nj}), \ldots$$

eine Folge von Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ und $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Vektor aus $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: Die Vektorenfolge konvergiert bzgl. einer Norm in $\mathbb{R}^n$ gegen den Vektor x genau dann, wenn für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Zahlenfolge $(x_{kj})_{j=1}^\infty$ gegen die Zahl x_k konvergiert. In diesem Sinne gilt

$$\lim_{j\to\infty} (x_{1j}, \ldots, x_{nj}) = \left(\lim_{j\to\infty} x_{1j}, \ldots, \lim_{j\to\infty} x_{nj}\right).$$

12.3 Vollständigkeit. Der Banachsche Fixpunktsatz

Cauchy-Folgen: Es seien (X, ρ) ein einmetrischer Raum und $x_1, x_2, \ldots \in X$ eine Folge mit

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m \geq n \geq n_0 : \; \rho(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Dann heißt die Folge Cauchy-Folge oder Fundamentalfolge in (X, ρ). Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Vollständigkeit: Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Beispiele: (i) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist mit der Standard-Metrik $\rho(x, y) = |x-y|$ nicht vollständig.

(ii) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist mit der Standard-Metrik $\rho(x, y) = |x-y|$ vollständig.

(iii) Die Menge $\mathbb{R}^n$ ist bezgl. jeder Norm in $\mathbb{R}^n$ vollständig.

(iv) Die Menge $C([a, b])$ ist bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (vgl. (12.7)) vollständig, aber nicht bzgl. $\|\cdot\|_2$ (vgl. (12.6)): Zum Beispiel durch

$$x_n(t) := \begin{cases} -1 + |x|^n & \text{für} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - |x|^n & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ist eine Cauchy-Folge in $C([-1, 1])$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegeben, die aber nicht konvergent bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist.

(v) Es seien (X, ρ) ein ein vollständiger metrischer Raum und X_0 eine Teilmenge von X, und für jede konvergente Folge $x_1, x_2, \ldots \in X_0$ gelte $\lim_{n\to\infty} \in X_0$. Dann ist auch (X_0, ρ) vollständig.

Banachscher Fixpunktsatz: Es seien (X, ρ) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Abbildung, und es existiere ein $c < 1$, so daß gilt

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \text{ für alle } x, y \in X. \tag{12.10}$$

Dann existiert genau ein $x_* \in X$ mit $f(x_*) = x_*$ (ein sogenannter Fixpunkt von f). Ferner gilt: Wenn $x_0 \in X$ beliebig gewählt ist und wenn die Folge $x_1, x_2, \ldots \in X$ induktiv definiert ist durch

$$x_{j+1} := f(x_j) \;\text{ für }\; j = 0, 1, 2, \ldots,$$

dann folgt $x_* = \lim_{j\to\infty} x_j$ und

$$\rho(x_j, x_*) \leq \frac{c}{1-c}\rho(x_j, x_{j-1}) \leq \frac{c^j}{1-c}\rho(x_2, x_1). \tag{12.11}$$

Beispiel: Es sei $X = [1, 2]$ mit der Standard-Metrik $\rho(x, y) = |x - y|$ und

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$

Es ist leicht zu überprüfen, dass f tatsächlich X in X abbildet und (12.10) mit $c = 1/2$ erfüllt. Der Fixpunkt von f ist $\sqrt{2}$, und (12.11) liefert

$$|x_j - \sqrt{2}| \leq 2^{-j+1}.$$

Wenn man nun die Wahl $X = [1,2]$ durch die Wahl $X = [1,2] \cap \mathbb{Q}$ ersetzt, so bildet f wieder X in X ab, d.h. für jeden rationalen Anfangswert x_1 sind alle Iterationen x_j ebenfalls rational. Aber die Folge der Iterationen besitzt keinen Grenzwert in X und f besitzt keinen Fixpunkt in X. Das ist möglich, weil $[1,2] \cap \mathbb{Q}$ nicht vollständig bzgl. ρ ist.

Beispiel: Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm (12.4). Ferner sei $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^n$ eine $n \times n$-Matrix mit

$$c := \sqrt{\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^2} < 1, \tag{12.12}$$

und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch $f(x) := Ax + \xi$ mit einem fixierten $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt f die Kontraktivitätsbedingung (12.10) mit der in (12.12) eingeführten Kontraktionskonstanten c:

$$\|f(x) - f(y)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}(x_k - y_k) \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk}^2 \sum_{l=1}^n (x_k - y_k)^2} = c\,\|x - y\|_2.$$

Folglich besitzt f genau einen Fixpunkt, d.h. das lineare Gleichungssystem $x - Ax = \xi$ besitzt genau eine Lösung $x = (I - A)^{-1}\xi$. Die Iterationen mit dem Anfangswert $x_0 = \xi$ sind

$$x_1 = A\xi + \xi,\; x_2 = A(A\xi + \xi) + \xi = (A^2 + A + I)\xi,\; \ldots,\; x_j = \sum_{k=0}^j A^k \xi,$$

und wegen (12.11) gilt

$$\left\| (I - A)^{-1}\xi - \sum_{k=0}^j A^k \xi \right\|_2 \leq \frac{c^j}{1 - c} \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2} = \frac{c^j}{1 - c} \|\xi\|_2.$$

Im Fall $n = 1$ ist das die geometrische Reihe:

$$\frac{\xi}{1 - A} = \sum_{k=0}^\infty A^j \xi.$$

Beispiel: Wir betrachten $X = C([0,c])$, $0 < c < 1$, mit der Norm (12.7), und $f : C([0,c]) \to C([0,c])$ sei definiert durch

$$[f(x)]\,(t) := \xi + \int_0^t x(s)ds.$$

Dann erfüllt f die Kontraktivitätsbedingung (12.10):

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq c} \int_0^t |x(s) - y(s)|ds \leq c\,\|x - y\|_\infty.$$

Der Fixpunkt x_* von f erfüllt $x_*(t) = \xi + \int_0^t x_*(s)ds$, d.h. die Differentialgleichung $x_*'(t) = x_*(t)$ und die Anfangsbedingung $x_*(0) = \xi$. Die Iterationen mit dem Anfangswert $x_0(t) = \xi$ sind

$$x_1(t) = \xi + \int_0^t x(s)ds = (1 + t)\xi,\; \ldots,\; x_j(t) = \sum_{k=0}^j \frac{t^k}{k!}\xi,$$

es gilt $x_j(t) \to x_*(t) = e^t\xi$ für $j \to \infty$ gleichmäßig bzgl. t, und wegen (12.11) gilt

$$\|x_* - x_j\| - \infty = \max_{0\le t\le c} \left| e^t\xi - \sum_{k=0}^{j} \frac{t^k}{k!}\xi \right| \le \frac{c^j}{1-c}\,|\xi|. \tag{12.13}$$

Die Partialsummen $x_j(t)$ streben gleichmäßig gegen e^t nicht nur auf den "kleinen" Intervallen $[0,c]$ mit $c < 1$, sondern auf jedem beschränkten Intervall, z.B. auch auf $[0,c]$ mit $c > 1$. Dann ist allerdings (12.13) keine gute Abschätzung mehr. Man kann bessere Abschätzungen mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes erhalten, wenn man andere, dem "großen" Intervall angepaßte Metriken benutzt.
Diese Beispiel läßt sich verallgemeinern: Für jede $n \times n$-Matrix A ist die Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) = \xi$ gleich

$$x(t) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{(At)^k}{k!}\xi.$$

Wenn man die Wahl $X = C([0,c])$ durch die Wahl $X = \{x \in C([0,c] : x \text{ ist Polynom}\}$ ersetzt, so bildet f wieder X in X ab, d.h. für jeden polynomialen Anfangswert x_1 sind alle Iterationen x_j ebenfalls Polynome. Aber die Folge der Iterationen besitzt keinen Grenzwert in X, und f besitzt keinen Fixpunkt in X. Das ist möglich, weil $\{x \in C([0,c] : x \text{ ist Polynom}\}$ nicht vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist.