Mathematik für Informatiker I: Analysis

Aufgabenserie 8 zum 17.12.02

1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

   b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$

2. Die Funktionen $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden durch
$$\sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$
definiert.
   (1) Leiten Sie für beide Funktionen Reihenentwicklungen her (als Potenzreihen in x).
   (2) Beweisen Sie die folgenden „Additionstheoreme".
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\cosh(x)$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(x)$$
$$\big(\cosh(x)\big)^2 - \big(\sinh(x)\big)^2 = 1$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei eine Abbildung, gegeben durch $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, Beweisen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn beide Abbildungen f_1, f_2 stetig sind.

4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ Grenzwerte an der Stelle $x = 0$ besitzen.
$$f_1(x) := \frac{\mathrm{Re}(x)}{|x|} \qquad f_2(x) := \frac{|\mathrm{Re}(x)| + |\mathrm{Im}(x)|}{|x|}$$

5.* Beweisen Sie: Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existieren eindeutig bestimmte Zahlen $x_\nu \in \mathbb{N}$, mit $x_\nu \leq \nu - 1$ für $\nu > 1$, die nicht fast alle gleich $\nu - 1$ sind, so dass
$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{\nu!}$$
ist. Zeigen Sie weiter:

   Die oben angegebene Reihe für x ist genau dann endlich (d.h. $x_\nu = 0$ für fast alle ν), wenn $x \in \mathbb{Q}$.

   Folgern Sie, dass die Zahl e irrational ist.