Übungsaufgaben „Algebra I“

Serie 1 zum 21.4.04

1. $\mathcal{C}$ bezeichne eine Kategorie. Beweisen Sie:
   (1) Die Funktoren $\mathbf{1} \to \mathcal{C}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Objekten von $\mathcal{C}$.
   (2) Die Funktoren $\mathbf{2} \to \mathcal{C}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Morphismen von $\mathcal{C}$.
   (3) Die Funktoren $\mathbf{3} \to \mathcal{C}$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Paaren (f, g) von Morphismen aus $\mathcal{C}$, für die das Produkt $f \cdot g$ definiert ist.

2. K sei ein Körper. Mit Matr_K bezeichnen wir folgende Kategorie:
   Objekte sind die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, und ein Morphismus $m \to n$ ist eine Matrix aus $\mathrm{M}(n, m; K)$.
   (1) Überprüfen Sie, dass Matr_K mit der Matrizenmultiplikation und den Einheitsmatrizen E_n eine Kategorie bildet.
   (2) $\mathcal{C}$ bezeichnet die Kategorie der Paare $(V, \mathcal{B})$, wobei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum positiver Dimension ist und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Morphismen sind die linearen Abbildungen. Zeigen Sie, dass durch

   $$V \mapsto \dim(V)$$
   $$(\varphi : (V, \mathcal{B}) \to (V', \mathcal{B}')) \mapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$$

   ein Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Matr}_K$ definiert wird.

3. Ein Morphismus $f : M \to N$ in einer Kategorie heißt Monomorphismus, falls er die folgende Eigenschaft besitzt: Sind $g_1 : P \to M$ und $g_2 : P \to M$ Morphismen mit $f \cdot g_1 = f \cdot g_2$, so ist $g_1 = g_2$.
   (1) Zeigen Sie, daß in der Kategorie $\mathcal{C}$ der Vektorräume über dem Körper K der Morphismus f genau dann ein Monomorphismus ist, wenn er injektiv ist.
   (2) Definieren Sie einen dualen Begriff „Epimorphismus“ und zeigen Sie, daß in $\mathcal{C}$ ein Morphismus genau dann Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.
   (3) Zeigen Sie, daß in der Kategorie Set der Mengen ein Morphismus genau dann Epimorphismus ist, wenn er surjektiv ist.
   (4) Geben Sie eine Kategorie von Mengen und Abbildungen an, in der ein nicht surjektiver Epimorphismus existiert.

4.* Wählen Sie einen einen Begriff oder einen Satz aus der Theorie der Vektorräume und versuchen Sie, diesen in der Sprache der Kategorien (ohne Verwendung von Elementen) zu formulieren bzw. zu beweisen.
   – – Nicht zur Abgabe – –