Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 2 zum 28.4.04

1. $(G,\cdot)$ sei eine Gruppe. Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z},+) \to (G,\cdot)$.

2.* $(G,\cdot)$ sei eine Gruppe und $\varphi : (\mathbb{Q},+) \to (G,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen voraus, dass φ nicht jedes Element von $\mathbb{Q}$ auf das neutrale Element der Gruppe G abbildet.

   Zeigen Sie, dass G unendlich ist.

3. $(G,\cdot)$ sei Gruppe. Für $g \in G$ definieren wir eine Abbildung $\varphi_g : G \longrightarrow G$ durch $\varphi_g(x) := g^{-1} \cdot x \cdot g$. Zeigen Sie:
   (1) φ_g ist ein Isomorphismus (Isomorphismen $G \to G$ heißen auch Automorphismen von G).
   (2) Es sei $\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : x\cdot g = g\cdot x\}$. Die Mengen $U_g := \{x \mid \varphi_g(x) = x\}$ bilden Untergruppen von G und $\mathrm{Z}(G)$ ist Durchschnitt aller U_g mit $g \in G$.
   (3) $\mathrm{Z}(G)$ ist Normalteiler in G.
   (4) Die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ der Automorphismen φ_g mit $g \in G$ ist ein Normalteiler in der Gruppe aller Automorphismen von G.
   (5) $\mathrm{Inn}(G) \cong G/\mathrm{Z}(G)$.

4. $(G,\cdot)$ sei eine Gruppe, $a, b \in G$ und a ein Element der Ordnung 5, für das $a^3\cdot b = b\cdot a^3$ gilt. Beweisen Sie: $a \cdot b = b \cdot a$.

5.* Wir betrachten die Gruppe S_n der Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$.
   (1) Zeigen Sie, dass die durch $\sigma \sim \tau \iff \exists \rho(\sigma = \rho^{-1} \cdot \tau \cdot \rho)$ gegebene Relation auf S_n („Konjugation“) eine Äquivalenzrelation ist.
   (2) Wie wir schon wissen, ist eine Permutation (im wesentlichen eindeutig) Produkt elementfremder Zyklen. Wir sagen, σ hat die Zyklenstruktur $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, falls in dieser Zerlegung ν_2 Zyklen der Länge 2, ν_3 Zyklen der Länge $3, \ldots, \nu_r$ Zyklen der Länge r usw. auftreten und $\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + n\nu_n = n$ ist.

   Beweisen Sie: Die Abbildung, die jeder Permutation aus S_n ihre Zyklenstruktur zuordnet, ist eine vollständige Invariante der Konjugation.

[1] Entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm