Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 3 zum 5.5.04

1. $U_1,\ U_1,\ U_3$ bezeichnen Untermoduln eines R-Moduls M. Beweisen Sie:
   (1) $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$.
   (2) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$ und insbesondere
   $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$, falls $U_1 \subseteq U_3$.

2. Ein Modul über dem Ring R heißt zyklisch, falls er von einem einzigen Element erzeugt wird. Beweisen Sie: Jeder zyklische Modul ist isomorph zu einem Modul $R/\boldsymbol{a}$, wobei $\boldsymbol{a}$ ein Ideal in R ist.

3. $M,\ M'$ bezeichnen Moduln über dem Ring R und $\varphi : M \to M'$ einen Homomorphismus.
   Zeigen Sie: Ist $U \subseteq \ker(\varphi)$ ein Untermodul, so faktorisiert φ über den kanonischen Homomorphismus $M \to M/U$:

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, dotted] \arrow[dr] & & M' \\
\ker(\varphi)/U \arrow[r] & M/U \arrow[r] \arrow[urr, dotted] & M/\ker(\varphi) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

4.* Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ der von 0 verschiedenen komplexen Zahlen und die Untergruppe $S^1 := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$; Gruppenoperation ist in beiden Fällen die Multiplikation komplexer Zahlen. Beweisen Sie: Die Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(S^1, \cdot)$ sind isomorph.

   Anleitung zum Beweis. Ein Isomorphismus $\mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\cong} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lässt sich so wählen, dass $1 \in \mathbb{R}$ auf $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ abgebildet wird. Wir vergessen die Vektorraumstrukturen und erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
\{0\} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}
$$

   Nach dem Homomorphieprinzip für Gruppen gibt es daher einen Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\{0\} \times \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, und die additiven Gruppen in diesem Produkt sind isomorph zu den multiplikativen Gruppen S^1 bzw. $\mathbb{R}^{>0} \times S^1$ (wenden Sie den Homomorphiesatz auf $\mathbb{R} \to S^1$ mit $x \mapsto e^{2\pi i x}$ an bzw. verwenden Sie den Isomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0} := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, der durch $x \mapsto e^x$ gegeben ist).

---

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm