Übungsaufgaben „Algebra[1] I“

Serie 4 zum 12.5.04

1. (1) $R_1,\ R_2$ seien kommutative Ringe. Zeigen Sie dass $R_1 \times R_2$ ebenfalls ein kommutativer Ring ist mit den komponentenweisen Operationen, die auf den Produkten der Monoide $(R_1, +)$ und $(R_2, +)$ bzw. $(R_1, \cdot)$ und $(R_2, \cdot)$ gegeben sind.

   (2) m und n seien teilfremde Zahlen. Zeigen Sie: Die Ringe $\mathbb{Z}/(mn)$ und $\mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(m)$ sind isomorph. Gilt das auch ohne die Voraussetzung, dass m und n teilerfremd sind?

   (3) Ist der unter (2) gefundene Isomorphismus auch ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln?

2. Für einen Ring R definieren wir den Annullator $\mathrm{Ann}_R(M)$ eines R-Moduls M durch $\mathrm{Ann}_R(M) := \{a \in R \mid \forall m \in M:\ a \cdot m = 0\}$.

   (1) Zeigen Sie: $\mathrm{Ann}_R(M)$ ist ein Ideal in R.

   (2) Bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_R(M)$ für $M = R/\boldsymbol{a}$, wobei $\boldsymbol{a}$ ein beliebiges Ideal in R bezeichnet.

   (3) Bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(17) \oplus \mathbb{Z}(9) \oplus \mathbb{Z}(17))$.

   (4) Zeigen Sie: Die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{Z}[X]$-Modul mit der Operation
   $$f \cdot m := f(9) \cdot m, \qquad f \in \mathbb{Z}[X],\ m \in \mathbb{Z}$$
   und bestimmen Sie $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z})$.

   Lösung. Wir geben Lösungen für ausgewählte Teilaufgaben an.

   Unter (2) ist zu sehen (Begründung?), dass
   $$\mathrm{Ann}_R(A/\boldsymbol{a}) = \{a \in R \,|\, a \cdot \overline{1} = \overline{0}\} = \boldsymbol{a}$$
   ist. Zur Lösung der Teilaufgabe (3) bemerken wir zunächst, dass für eine direkte Summe $M \oplus N$ von R-Moduln der Annullator als $\mathrm{Ann}_R(M \oplus N) = \mathrm{Ann}_R(M) \cap \mathrm{Ann}_R(N)$ erhalten wird, denn das Produkt mit einem Ringelement verschwindet genau dann, wenn die Produkte mit den direkten Komponenten verschwinden. Nach (2) gewinnen wir nun
   $$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(17) \oplus \mathbb{Z}(9) \oplus \mathbb{Z}(17)) = (17) \cap (9) \cap (17) = (153)$$
   als das Ideal in $\mathbb{Z}$, das vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen 17, 9 und 17 erzeugt wird.

   Unter (4) erhalten wir
   $$\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}) = \{f \in \mathbb{Z}[X] \,|\, f(9) \cdot 1 = 0\} = \{f \in \mathbb{Z}[X] \,|\, f(9) = 0\}.$$
   Daher muss ein Polynom $f \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z})$ durch $X - 9$ teilbar sein. Umgekehrt ist jedes Polynom f mit dieser Eigenschaft wegen $f(9) = 0$ auch Element des Annulators, d.h. der gesuchte der Annullator ist das Ideal $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}[X]}(\mathbb{Z}) = (X - 9)$.

---

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

3. Geben Sie die durch folgende Präsentationsmatrix A beschriebene abelsche Gruppe G als direkte Summe zyklischer Gruppen an, die von Primzahlpotenzordnung oder isomorph zu $\mathbb{Z}$ sind:

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 6 & -10 \\ 18 & -6 & 0 \\ 18 & -6 & 12 \\ -35 & 12 & -10 \end{pmatrix}$$

Ergebnis. Auf die Matrix A werden Zeilen und Spaltenoperationen (z.B. nach dem smithschen Algorithmus) angewendet, durch die eine äquivalente Präsentationsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entsteht, in der nur an Positionen (i, i) von 0 verschiedene Einträge auftreten. Beachten Sie: Zulässige Operationen sind dabei

(1) Addition eines ganzzahligen Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen,

(2) Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit -1.

Wir bestimmen aus den Einträgen von B den Isomorphietyp der Gruppe G: Quotientenbildung nach der Summe der Untergruppen $b_{ii} \cdot \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_i$ ergibt

$$\begin{aligned} G &\cong \mathbb{Z}^4/(12 \cdot \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_1 \oplus 6 \cdot \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_2 \oplus 1 \cdot \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_3 \oplus 0 \cdot \mathbb{Z}\boldsymbol{e}_4) \\ &\cong \mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}/(1) \oplus \mathbb{Z}/(0) \\ &\cong \mathbb{Z}/(12) \oplus \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden werden nun nach dem chinesischen Restsatz in direkte Summen von Gruppen von Primzahlpotenzordnung zerlegt. Es folgt

$$G \cong \mathbb{Z}/(4) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}.$$

4. M sei ein freier Modul vom Rang $n < \infty$ über dem Ring R. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen zutrifft (Beweis oder Gegenbeispiel):

(1) Jede linear unabhängige Teilmenge lässt sich zu einer Basis von M ergänzen.

(2) Aus jedem Erzeugendensystem lässt sich eine Basis von M auswählen.

5. * $(M_i)_{i \in I}$ bezeichne eine Familie von Moduln über dem Ring R und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln $U_i \subseteq M_i$. Beweisen Sie:

(1) $\bigoplus_{i \in I} U_i$ ist Untermodul von $\bigoplus_{i \in I} M_i$.

(2) $\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right)/\left(\bigoplus_{i \in I} U_i\right) \cong \left(\bigoplus_{i \in I} M_i/U_i\right)$.