Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 5 zum 19.5.04

1. Die nachfolgend angegebenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden (soweit die Einschränkungen existieren) mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation reeller Zahlen versehen. Beweisen Sie:
   (1) $R := \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2.
   (2) $K := \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist ein Körper.
   (3) K ist als R-Modul nicht endlich erzeugt.

2. Es sei $G = \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(24) \oplus \mathbb{Z}/(33) \oplus \mathbb{Z}/(54)$. Geben sie (bis auf Isomorphie) eine Darstellung der abelschen Gruppe G
   (1) als direkte Summe zyklischer Gruppen von Primzahlpotenzordnung und
   (2) als direkte Summe zyklischer Gruppen U_i, so dass die Ordnung von U_i die Ordnung von U_{i+1} teilt.

   Lösung:
   (1) $G \cong \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(5) \oplus \mathbb{Z}/(2^3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(3) \oplus \mathbb{Z}/(11) \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(3^3)$,
   (2) $G \cong U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$ mit
   $U_1 = \mathbb{Z}/(3),\ U_2 = \mathbb{Z}/(3),\ U_3 = \mathbb{Z}/(2 \cdot 3),\ U_4 = \mathbb{Z}/(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11)$.

3. Zeigen Sie, daß der Ring $R = K[X]$ der Polynome einer Unbestimmten über dem Körper K ein noetherscher Ring ist.

   Hinweis: Sie wissen bereits, daß jedes Ideal in R von einem Element erzeugt ist.

   Lösung: Es sei $(\boldsymbol{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Idealen in R mit $\boldsymbol{a}_i \subseteq \boldsymbol{a}_{i+1}$. Wir haben zu zeigen, dass $(\boldsymbol{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ stationär ist, d.h. eine Zahl $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, für die $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_{i+1}$ sofern $i \geq i_0$. Dazu wählen wir ein erzeugendes Element $r \in \boldsymbol{a} := \bigcup_{i\in\mathbb{N}}$ (überzeugen Sie sich davon, dass $\boldsymbol{a}$ ein Ideal ist). Nach Konstruktion liegt r in einem der Ideale $\boldsymbol{a}_i$. Ist $i = i_0$ der betreffende Index, so folgt $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}$ für $i = i_0$. Ist nun $i \geq i_0$ beliebig, so ergibt sich aus $\boldsymbol{a}_{i_0} \subseteq \boldsymbol{a}_i \subseteq \boldsymbol{a}$ die Behauptung.

4. Ein R-Modul P heißt projektiv, falls er die folgende Eigenschaft besitzt:
   (∗) Für alle surjektiven Homomorphismen $\varphi : M \to N$ und alle Homomorphismen $\alpha : P \to N$ existiert ein Homomorphismus $\psi : P \to M$ mit $\varphi \cdot \psi = \alpha$.

   Beweisen Sie:
   (i) Jeder freie Modul P besitzt die Eigenschaft (∗).
   (ii) Es sei
   $$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$
   eine exakte Folge und M'' projektiv. Dann ist M isomorph zur direkten Summen von M' und M''.

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

5.* In der Kategorie der R-Moduln betrachten einen Homomorphismus $\varphi : M \to N$.

(i) Zeigen Sie: φ kann zu einer exakten Folge

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

erweitert werden, in der $N \to C$ der kanonische Homomorphismus von N auf $C = M/\operatorname{im}(\varphi)$ ist.

(ii) Es sei

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] & N \arrow[r] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Ergänzen Sie dieses mittels (i) zu einem kommutativen Diagramm mit exakten Spalten in folgender Gestalt, so dass alle Zeilen exakt sind:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d] & K'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& C' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Zeigen Sie weiter, dass dann eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow K \xrightarrow{\psi} K'' \longrightarrow C' \longrightarrow C \xrightarrow{\psi} C'' \longrightarrow 0$$

existiert.