Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 6 zum 26.5.04

1. Bestimmen Sie in den nachfolgend angegebenen Fällen alle ganzen Zahlen x, durch die die angegebenen Systeme von Kongruenzen erfüllt werden.

   (1) $x \equiv 3 \mod(6), \quad x \equiv 5 \mod(7)$

   (2) $x \equiv 8 \mod(124), \quad x \equiv 89 \mod(212)$

   Lösung. Unter (1) ist notwendig $x = 3+6a = 5+7b$ mit geeigneten Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$. Für die Gleichung $6a - 7b = 5 - 3$ finden wir wegen $\mathrm{ggT}(6,7) = 1$ leicht eine Lösung: $1 = 6 \cdot (-1) + 7 \cdot 1$, d.h. $5 - 3 = 6 \cdot (-2) + 7 \cdot 2$, also $x = 5 - 7 \cdot 2 = 3 + 6 \cdot (-2)$ erf üllt die angegebenen Kongruenzen. Zwei Lösungen unterscheiden sich offenbar um ein Vielfaches von $\mathrm{kgV}(6,7) = 1$, d.h. $\{-9+42n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist die gesuchte Lösungsmenge.

   Unter (2) ist die Lösungsmenge leer (warum?).

2. M sei ein Modul über dem Integritätsbereich R und

   $$M = R/(d_1) \oplus \ldots \oplus R/(d_s) \oplus R^t$$

   mit $s, t \in \mathbb{N}$, $d_i \in R \setminus \{0\}$ sowie $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_s$. Beweisen Sie:

   (1) Der Torsionsuntermodul von M ist $\mathrm{T}_R(M) = R/(d_1) \oplus \ldots \oplus R/(d_s)$.

   (2) Die Zahl t ist durch M eindeutig bestimmt.

   (3) Ist M selbst ein Torsionsmodul, so gilt $t = 0$ und $\mathrm{Ann}_R(M) = (d_s)$.

3. Bestimmen Sie die Diagonalform einer Präsentationsmatrix für

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2),$$

   bei der der jeweils i-te Diagonaleintrag den $(i+1)$-ten teilt.

   Lösung. Die charakteristische Matrix ist

   $$X \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 \\ 1 & X+1 & 1 \\ 1 & 0 & X \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X]).$$

   Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ X+1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & X \end{pmatrix},$$

   die an der Position $(1,1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus eine Matrix

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

$$\begin{pmatrix} 1 & X+1 & 1 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat. Sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+1 & X+1 \\ 0 & X+1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Durch Fortführung des Verfahrens ergibt sich leicht die gesuchte Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A.

4. Ist der durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte $\mathbb{C}[X]$-Modul $\mathbb{C}^5$ zyklisch?

Anmerkung. Die Ausführung der Jordanzerlegung hängt natürlich von der Bestimmung der Eigenwerte ab. Dies wird Ihnen hier nicht gelingen - es geht „prinzipiell“ nicht ...

5. * Wir betrachten einen Körper k und ein irreduzibles Polynom $p \in k[X]$. Beweisen Sie: Bis auf Isomorphie ist k Unterkörper eines Körpers K, der ein Element ξ enthält mit $p(\xi) = 0$. Folgern Sie induktiv, daß daß für jedes Polynom $f \in k[X]$ ein Erweiterungskörper existiert, in dem f Produkt linearer Polynome ist.

Anleitung: Betrachten Sie den Ringhomomorphismus $k \to k[X]/(p)$ und zeigen Sie, daß auf der rechten Seite ein Körper steht; wählen Sie ξ als die Klasse von X.