

## Übungsaufgaben<sup>1</sup> „Algebra I“

### Serie 7 zum 2.6.04

1.  $V = \mathbb{R}^2$  und  $W = \mathbb{R}^3$  bezeichnen die reellen Standardräume mit den kanonischen Basen  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , bzw.  $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ . Zerlegen Sie die Tensoren  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \in V \otimes_{\mathbb{R}} W$  in Vielfachensummen der Basisvektoren aus  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$ , wobei
- (1)  $\mathbf{v} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{w} = 2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3$ ,
  - (2)  $\mathbf{v} = (-2, -3)$ ,  $\mathbf{w} = (0, 3, -1)$ .

2. Zeigen Sie: Sind  $V$ ,  $W$  und  $P$  Moduln über dem Ring  $R$ , so existieren folgende Isomorphismen (1) bzw. (2), die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind.

(1)  $V \otimes_R W \cong W \otimes_R V$ ,  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$

(2)  $(V \otimes_R W) \otimes_R P \cong V \otimes_R (W \otimes_R P)$ ,  $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \otimes \mathbf{p} \mapsto \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w} \otimes \mathbf{p})$

3.  $\varphi : M \rightarrow N$  und  $\psi : M' \rightarrow N'$  seien Homomorphismen freier  $R$ -Moduln, die bezüglich gegebener Basen  $\mathcal{B}_M = (m_i)_{i \in I}$  von  $M$ ,  $\mathcal{B}_{M'} = (m'_{i'})_{i' \in I'}$  von  $M'$ ,  $\mathcal{B}_N = (n_j)_{j \in J}$  von  $N$  und  $\mathcal{B}_{N'} = (n'_{j'})_{j' \in J'}$  von  $N'$  die Matrizen  $A \in M(J \times I, R)$ , bzw.  $B \in M(J' \times I', R)$  besitzen.

- (i) Welche Matrix hat der Homomorphismus

$$\varphi \otimes_R \psi : M \otimes_R M' \rightarrow N \otimes_R N'$$

bezüglich der Basen  $(m_i \otimes m'_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$  von  $M \otimes_R M'$  und  $(n_j \otimes n'_{j'})_{(j,j') \in J \times J'}$  von  $N \otimes_R N'$ ?

- (ii) Geben Sie diese Matrix an, wenn  $R = \mathbb{Z}$  ist,

$$\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, y),$$

$$\psi : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (x, y, z) \mapsto x - y + z$$

und alle gegebenen Basen die kanonischen Basen sind.

**Hinweis.** Wählen Sie für die Anordnung der Basisvektoren im Tensorprodukt jeweils die lexikographische Ordnung der Indexpaare.

- 4.\* Es seien  $f = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \in \mathbb{Z}[X]$  ein Polynom und  $p \in \mathbb{Z}$  eine Primzahl mit den folgenden Eigenschaften:

(1)  $p \mid a_i$  für alle  $i$ ,

(2)  $p^2 \nmid a_n$ .

Dann ist  $f$  irreduzibel als Polynom aus  $\mathbb{Q}[X]$ .

- 5.\* Wir betrachten ein irreduzibles Polynom  $f \in K[X]$ , wobei  $K \subseteq \mathbb{C}$  ein Unterkörper der komplexen Zahlen ist.

Beweisen Sie:  $f$  besitzt keine mehrfache Nullstelle  $\alpha \in \mathbb{C}$ , d.h. als Element von  $\mathbb{C}[X]$  ist  $f$  nicht durch  $(X - \alpha)^2$  teilbar.

<sup>1</sup> Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,  
Online-Version: [www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm](http://www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm)  
© M. Roczen und H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza