Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 8 zum 9.6.04

1. Mit U, V und W werden endlichdimensionale K-Vektorräume der Dimensionen p, n bzw. q bezeichnet, für die eine exakte Folge
$$\mathbf{0} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \mathbf{0}$$
existiert. Beweisen Sie:
   (1) Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung
   $$\Gamma : \Lambda^p(U) \otimes_K \Lambda^q(W) \to \Lambda^n(V), \text{ für die}$$
   $$\Lambda^p((\boldsymbol{u}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p) \otimes (\boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q)) = \boldsymbol{u}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p \wedge \boldsymbol{w}'_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}'_q$$
   ist, wenn $\boldsymbol{u}_i \in U$ und $\boldsymbol{w}_j \in W$ sind sowie $\boldsymbol{w}'_j \in V$ Vektoren bezeichnen, so dass $\psi(\boldsymbol{w}'_j) = \boldsymbol{w}_j$ gilt.
   (2) Der unter (1) gefundene Homomorphismus Γ ist ein Isomorphismus.

2. Wir betrachten den reellen Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.
   (1) Geben Sie die Basen $\Lambda^1\mathcal{B}$, $\Lambda^2\mathcal{B}$ und $\Lambda^3\mathcal{B}$ für die Vektorräume $\Lambda^1(V)$, $\Lambda^2(V)$ bzw. $\Lambda^3(V)$ an.
   (2) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basen $\Lambda^i\mathcal{B}$, und zwar für
      a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$,

   und für
      b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{e}_1 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{x}_3 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_2$.

   Ergebnis.
   (1) $\Lambda^1\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$
   $\Lambda^2\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$
   $\Lambda^3\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$.
   (2) Wir erhalten durch Ausmultiplizieren
      a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_3 = 0 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 0 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_2 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + 3 \cdot \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$,
      b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$,

   womit in jedem Fall das Koordinatentupel aus den entsprechenden Koeffizienten der Basisvektoren abgelesen werden kann.

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

3. Bestimmen Sie die folgenden äußeren Potenzen, und zwar
   (1) $\Lambda^2(A)$ für die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$
   (2) $\Lambda^3(B)$ für die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Ergebnis.

   (1) $$\Lambda^2(A) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -6 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (2) $$\Lambda^3(B) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. R bezeichnet einen Ring (wie bisher kommutativ, mit Eins) und n, m natürliche Zahlen. Beweisen Sie:
   (1) Falls ein surjektiver Homomorphismus $R^m \to R^n$ von R-Moduln existiert, so ist $m \geq n$.
   (2) Folgern Sie insbesondere den (bereits bekannten) Satz, dass aus $R^m \cong R^n$ stets $m = n$ folgt.

5. $\varphi : M \to N$ sei ein Homomorphismus von R-Moduln. Mit $o(\varphi)$ bezeichnen wir das Ideal $o(\varphi) := \sum_{f \in N^*} \mathrm{im}(f \cdot \varphi)$ in R, wobei (wie bisher) $N^* := \mathrm{Hom}_R(N, R)$ der duale Modul zu N ist. Zeigen Sie:
   (1) Für $N = R$ ist $o(\varphi) = \mathrm{im}(\varphi)$.
   (2) Ist $M = R^m$, $N = R^n$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times m, R)$ die Matrix von φ, so gilt $o(\varphi) = \sum_{i,j} R \cdot a_{ij}$.
   (3) Sind M, N endlich erzeugte freie Moduln und ist ${}^{\mathrm{t}}\varphi : N^* \to M^*$ die transponierte Abbildung von $\varphi : M \to N$, so folgt $o(\varphi) = o({}^{\mathrm{t}}\varphi)$.