Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 10 zum 23.6.04

1. Wir betrachten das Polynom $f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$. Beweisen Sie: $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ist Zerfällungskörper von f, wenn d die Zahl $b^2 - 4ac$ bezeichnet.

2. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $f = X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und geben Sie die Zerlegung von f in irreduzible Faktoren an, wenn f jeweils als Polynom über $K[X]$ betrachtet wird; dabei ist K einer der folgenden Körper:
   - (i) $K = \mathbb{Q}$
   - (ii) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
   - (iii) $K = \mathbb{Q}[i]$
   - (iv) $K = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$

   Lösung. Wir finden mittels einer vertrauten binomischen Formel
   $$f = (X^2 - \sqrt{2}) \cdot (X^2 + \sqrt{2}) = (X + \sqrt[4]{2}) \cdot (X - \sqrt[4]{2}) \cdot (X + i\sqrt[4]{2}) \cdot (X - i\sqrt[4]{2})$$
   und so die komplexen Nullstellen von f im Körper $\mathbb{C}$. Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}] = \mathbb{Q}[i, \sqrt[4]{2}]$ ist der kleinste Zwischenkörper von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$, der diese enthält und damit Zerfällungskörper von f.
   Wir untersuchen nun $f \in K[X]$ auf Irreduzibilität:
   - (i) Ist $K = \mathbb{Q}$, so folgt aus Aufgabe 7.4 (mit $p = 2$), dass f irreduzibel ist.
   - (ii) $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$: $f = (X^2 - \sqrt{2}) \cdot (X^2 + \sqrt{2})$; Der zweite Faktor ist irreduzibel, da er keine reelle Nullstelle, also erst recht keine in $\mathbb{Q}$ besitzt. Der erste Faktor ist irreduzibel, da die reelle Nullstelle $\sqrt[4]{2}$ kein Element von $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ ist: Anderenfalls hätten wir $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}] \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Eine einfache Körpererweiterung vom Grad 4 wäre damit in einer vom Grad 2 enthalten, was der vertrauten Formel für einen Turm von Körpererweiterungen entspricht.
   - (iii) $K = \mathbb{Q}[i]$: f ist selbst irreduzibel, denn keine der komplexen Nullstellen liegt in K (d.h. es gibt keinen linearen Teiler in $K[X]$), und ein Produkt von zwei der oben gefundenen komplexen Linearfaktoren liegt nicht in $K[X]$ (warum genügt das?).
   - (iv) $K = \mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}]$: $f = (X + \sqrt[4]{2}) \cdot (X - \sqrt[4]{2}) \cdot (X^2 + \sqrt{2})$.

3. K sei ein Körper, $K' \supseteq K$ ein Erweiterungskörper.
   - (i) Zeigen Sie, daß $\alpha \in K'$ genau dann algebraisch über K ist, wenn ein Erweiterungskörper K_1 von K existiert, $K \subseteq K_1 \subseteq K'$ mit $\alpha \in K_1$, für den der Erweiterungsgrad $[K_1 : K]$ endlich ist.

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm
© M. Roczen und H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza

(ii) Zeigen Sie, daß die Menge aller Elemente aus K', die über K algebraisch sind, einen Erweiterungskörper von K bildet.

4. α_1 und α_2 bezeichnen algebraische Elemente eines Erweiterungskörpers K' des Körpers K.
   Beweisen Sie: Für jedes Polynom $f \in K[X,Y]$ ist der Grad des über K algebraischen Elements $f(\alpha_1, \alpha_2) \in K'$ nicht größer als das Produkt der Grade von α_1 und α_2.

5. $f \in K[X]$ sei Polynom über dem Körper K und $K' \supseteq K$ ein Zerfällungskörper von f. Beweisen Sie, dass $[K' : K] \leq \deg(f)$ ist.

   Lösung. Die Behauptung ist im Allgemeinen falsch: Ein Gegenbeispiel ergibt sich mit dem Polynom f aus der Aufgabe 2 dieser Serie, für das wir $\mathbb{Q}[\sqrt[4]{2}, i]$ als Zerfällungskörper erhalten, $\lightning$.

   Richtig dagegen ist die folgende **Behauptung:** $[K' : K] \leq \deg(f)!$.

   Zum Beweis betrachten wir den Turm von Körpererweiterungen

   $$K \subseteq K[\alpha_1] \subseteq \ldots \subseteq K[\alpha_1, \ldots, \alpha_t] \subseteq K[\alpha_1, \ldots, \alpha_{t+1}] \subseteq \ldots \subseteq K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = K',$$

   den wir aus den Nullstellen α_t des Polynomes f erhalten, wobei $f = (X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_n)$ in $K'[X]$. $[K' : K]$ ist Produkt der auftretenden Erweiterungsgrade. Weiter ist $f/((X - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (X - \alpha_t)) \in (K[\alpha_1, \ldots, \alpha_t])[X]$ ein Polynom vom Grad $n - t$, dessen Grad nicht kleiner ist als der des Minimalpolynoms von α_{t+1} über $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_t]$, denn α_{t+1} ist eine seiner Nullstellen. Wir erhalten so die Abschätzung $[K' : K] \leq n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-t) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Hinweis.

Bitte beachten Sie: Am 23.6.04 findet die Klausur statt; die Ergebnisse sind Bestandteil der Bewertung für den Übungsschein.

Thema ist der Stoff bis zur Serie 9.