Übungsaufgaben[1] „Algebra I“

Serie 11 zum 30.6.04

1. $f \in K[X]$ bezeichne ein Polynom über dem Körper K.
   (1) Wir setzen $\deg(f) = 3$ voraus. Beweisen Sie: Das Polynom f ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle (in K) besitzt.
   (2) Untersuchen Sie folgende Polynome auf Irreduzibilität:
      (i) $f \in \mathbb{R}[X]$ mit $\deg(f) = 3$
      (ii) $f = X^3 - X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$
      (iii) $f = X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{F}_3[X]$
   (3) Geben Sie ein Polynom vom Grad 4 über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen an, das weder eine Nullstelle besitzt noch irreduzibel ist.

2. Untersuchen Sie, ob das Polynom $f = X^5 + X^4 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.

3. Untersuchen Sie unter Verwendung der in Aufgabe 4 aus Serie 7 gewonnenen hinreichenden Bedingung („Eisenstein-Kriterium“), ob die folgenden Polynome über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen irreduzibel sind.
   (1) $f = X^5 - 3X^2 + 9X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$
   (2) $g = X^5 + 5X^2 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$ (kein Schreibfehler!)

4. K sei ein Körper, $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und $a, b \in K$
   Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass das Polynom $f = X^2 + aX + b \in K[X]$ irreduzibel ist.

5. K sei ein endlicher Körper und $K^* = K \setminus \{0\}$ die multiplikative Gruppe seiner von 0 verschiedenen Elemente.
   Bestimmen Sie für die abelsche Gruppe K^* den Rang und die invarianten Teiler.

[1] Einzelne Aufgaben entnommen aus „Lineare Algebra individuell“,
Online-Version: www.mathematik.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm