Name:											
Vorname:											

Aufgabe 5

$K[X]$ sei der Polynomring über dem Körper K in einer Unbestimmten X. Für Matrizen aus $\mathrm{M}(n, K[X])$ wird folgende Äquivalenzrelation eingeführt. Zwei Matrizen sind äquivalent, wenn sie durch Aufeinanderfolge von Umformungen der folgenden drei Typen ineinander überführt werden können:

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten),

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit einer Zahl aus $K \setminus \{0\}$,

(3) Addition des p-fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen, wobei $p \in K[X]$.

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n, K[X])$ mit der nicht konstanten Determinante $\det(A) = d \in K[X]$, wobei die Darstellung der Determinante als Produkt irreduzibler, nicht assoziierter Faktoren $d_i \in K[X]$ die Eigenschaft hat, dass jeder dieser Faktoren nur in der ersten Potenz auftritt.

Zeigen Sie: Alle Matrizen $B \in \mathrm{M}(n, K[X])$ mit $\det(B) = c \cdot d$ und $c \in K^*$ sind im obigen Sinne äquivalent.

Lösungen zur Aufgabe 5

Aufgabe 5

Lösung. Die zulässigen Umformungen einer Äquivalenzklasse können durch Multiplikation mit Matrizen gewonnen werden, deren Determinanten in K^* liegen. Folglich unterscheiden sich die Determinanten auf einer Äquivalenzklasse nur um einen Faktor aus K^*.
Stimmen umgekehrt die Determinanten zweier Matrizen bis auf einen Faktor aus K^* überein, so folgt im Allgemeinen noch nicht, dass sie in der selben Äquivalenzklasse liegen. Um das für unseren Spezialfall zu zeigen, wird die Struktur einer solchen Äquivalenzklasse genauer beschrieben. In jeder der oben definierten Äquivalenzklassen gibt es genau eine Matrix S mit den Eigenschaften:

(a) $S = \operatorname{diag}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$,

(b) $f_i | f_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1$,

(c) $\operatorname{LC}(f_i) = 1$.

Das ist die smithsche Normalform. Aus (a) folgt unmittelbar

$$\det(S) = \prod_{i=1}^{n} f_i.$$

Aus (b) folgt: f_i ist Faktor von f_{i+1}. Damit ist f_i^{n-i+1} Faktor von $\det(S)$. Für unseren Spezialfall mit $\det(S) = c' \cdot d$ (mit $c' \in K$) folgt $f_i \in K$ für $i < n$ (anderenfalls treten polynomialen Faktoren höherer Potenz auf). Unter Verwendung von (c) ergibt sich

$$S = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, d/\operatorname{LC}(d))$$

als die smithsche Normalform. Alle Matrizen $B \in \operatorname{M}(n, K[X])$ mit $\det(B) = c{\cdot}d$, $c \in K^*$ besitzen diese Normalform und sind damit äquivalent. ❑