Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 1 zum 1.11.04

1. Zeigen Sie, dass für Mengen A, B, C, D stets gilt:
   (1) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
   (2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
   (3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
   (4) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$, (!)
   (5) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

2. Bestimmen Sie die folgenden Potenzmengen:
   (1) $\mathrm{Pot}(\{\emptyset\})$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\{\emptyset\}))$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\emptyset)))$,
   (2) die Potenzmenge der Menge $\mathrm{Pot}(\{2, 3\})$.

3. A, B, C und D seien Aussagen. Wir setzen

$$\varPhi := (A \wedge B) \Rightarrow (\neg C \vee D)\,, \quad \varphi := A \wedge B\,, \quad \psi := \neg C \vee D.$$

Bestimmen Sie zu allen möglichen Wahrheitswerten der Grundaussagen A, B, C und D den Wahrheitswert für $\varPhi$, indem Sie die folgende Tabelle ergänzen.

A	B	C	D	φ	ψ	$\varPhi$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F			
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W			
F	W	W	W			
F	F	W	W			
F	W	F	W	F	W	W
F	W	W	F			
W	F	F	W			
W	F	W	F			
W	W	F	F			
F	F	F	W	F	W	W
F	F	W	F			
F	W	F	F			
W	F	F	F	F	W	W
F	F	F	F	F	W	W

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

4. Untersuchen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, ob die folgenden Aussagen gültig sind:

   (1) $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$ (eine Form des indirekten Beweises),

   (2) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$,

   (3) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$.

5. Für natürliche Zahlen $k \leq n$ setzen wir $\binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ist. Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*.

   Zeigen Sie:

   (1) Für $k < n$ gilt: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

   (2) Es ist stets $\binom{2n}{n} \geq 2^n$.

   (3) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 1 zum 1.11.04

3. **Ergebnis.** Die vervollständigte Tabelle sieht so aus:

A	B	C	D	φ	ψ	Φ
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F	W	F	F
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W	F	W	W
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	F	W	W
F	W	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W
W	F	W	F	F	F	W
W	W	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	W	W
F	F	W	F	F	F	W
F	W	F	F	F	W	W
W	F	F	F	F	W	W
F	F	F	F	F	W	W