Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 2 zum 8.11.04

1. Für jede Menge M ist durch
$$\mathrm{Char}_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
die *charakteristische Abbildung von* M definiert.
Zeigen Sie, dass $X \mapsto \mathrm{Char}_X$ mit $X \subseteq M$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Pot}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, 2)$ ist.

2. Geben Sie in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, R_2 R_3 und R_4 an, für die gilt:
   (1) R_1 ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch.
   (2) R_2 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.
   (3) R_3 ist transitiv, symmetrisch und nicht reflexiv.
   (4) R_4 ist transitiv, symmetrisch und reflexiv.

3. Geben Sie alle Abbildungen $f : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$ durch ihre Wertetafeln an. Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

4. f und g seien Abbildungen, für die $f \circ g$ definiert ist. Beweisen Sie:
   (1) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.
   (2) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv.
   (3) Gilt unter (1) bzw. (2) die Behauptung auch für die jeweils andere Abbildung g bzw. f ?

5.* X, Y, Z seien Mengen. X^Y sei die Menge aller Abbildungen von Y in X und $X \approx Y$ soll bedeuten, dass zwischen X und Y eine Bijektion existiert. Beweisen Sie:
   (1) Wenn $Y \cap Z = \emptyset$, so ist $X^{Y \cup Z} \approx X^Y \times X^Z$.
   (2) $(X \times Y)^Z \approx X^Z \times Y^Z$,
   (3) $X^{Y \times Z} \approx (X^Y)^Z$.

---

[1] Ein * neben der Aufgaben-Nr. weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm