Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 3 zum 15.11.04

1. $(f_i)_{i\in I}$ sei eine Familie von Abbildungen $f_i : M_i \to N_i$. Beweisen Sie, dass das kartesische Produkt
$$\prod_{i\in I} f_i : \prod_{i\in I} M_i \to \prod_{i\in I} N_i, \quad (x_i)_{i\in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i\in I}$$
dieser Abbildungen surjektiv ist, falls alle Abbildungen f_i surjektiv sind.
Gilt die Umkehrung?

2.* Beweisen Sie: Jede Ordnung R einer Menge M lässt sich zu einer linearen Ordnung erweitern.

3. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
   (1) Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.
   (2) Ist n eine natürliche Zahl ≥ 2, dann gilt $\underbrace{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{n-mal} \approx \mathbb{N}$.
   (3) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abzählbar, dann ist $A_1 \times \ldots \times A_n$ abzählbar.

4. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:
   (1) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.
   (2) Die Mengen der ganzen und der rationalen Zahlen sind abzählbar.
   (3) Ist A abzählbar und B überabzählbar, dann ist $B \setminus A$ überabzählbar.
   (4) Die Menge aller endlichen Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

5. Wir wählen Zahlen $n, k_1, \ldots, k_b \in \mathbb{N}$ mit $n = k_1 + \ldots + k_b$ und definieren
$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_b} := \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_b!}.$$
   (1) Beweisen Sie:
$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_b} = \binom{n}{k_1} \cdot \binom{n-k_1}{k_2} \cdot \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \cdot \ldots \cdot \binom{k_b}{k_b},$$
   und diese Zahl ist gleich der Anzahl der Abbildungen
   $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, b\}$,
   für die das Urbild von $i \in \{1, \ldots, b\}$ genau k_i Elemente besitzt.

[1] Ein * neben der Aufgaben-Nr. weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

(2) Ein Kartenspiel hat 11 Karten. Diese werden auf 3 Spieler verteilt, so dass jeder 3 Karten erhält; die übrigen Karten werden beiseite gelegt.
Wieviele „Spiele“ gibt es?

(3) Zeigen Sie, dass die Menge der bijektiven Abbildungen
$\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$
genau $n!$ Elemente besitzt.