Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 4 zum 22.11.04

1. Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definieren wir Operationen
   (1) $x * y := x - y$,
   (2) $x \times y := x^2 + y^2$,
   (3) $x \odot y := 3x + y$.
   Untersuchen Sie diese auf Assoziativität und Kommutativität.

2. $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine endliche, nichtleere Teilmenge von G. Beweisen Sie: H ist Untergruppe von G genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ gilt $x \cdot y \in H$.
   Kann auf die Voraussetzung verzichtet werden, dass H endlich ist?

3. Mit G bezeichnen wir die *Symmetriegruppe* eines gleichseitigen Dreiecks, das wir als Teilmenge des Raumes betrachten. Damit meinen wir die Gruppe der Bewegungen, die diese Figur in sich überführen; jedes ihrer Elemente ist durch die Zuordnung der Ecken eindeutig bestimmt.
   (1) Geben Sie einen Isomorphismus $f : G \to \mathrm{S}_3$ an!
   (2) Bestimmen Sie die Untergruppe $f(U)$ von S_3, wenn U die Untergruppe der Drehungen des Dreiecks in der Ebene bezeichnet.
   (3) Lässt sich ein Isomorphismus der Symmetriegruppe eines Quadrats und der Gruppe S_4 finden?

4.* Es sei A eine abelsche Gruppe. Die zu A gehörige Diedergruppe wird als

$$\mathrm{D}(A) := \{(a, \varepsilon) | a \in A,\ \varepsilon \in \{1, -1\}\}$$

definiert mit der Multiplikation

$$(a, \varepsilon)(b, \eta) = (ab^{\varepsilon}, \varepsilon\eta).$$

Zeigen Sie:
   (1) $\mathrm{D}(A)$ ist Gruppe mit neutralem Element $(1, 1)$, und $(a, \varepsilon)^{-1} = (a^{-\varepsilon}, \varepsilon)$ für $(a, \varepsilon) \in \mathrm{D}(A)$.
   (2) Wir identifizieren A mit dem Bild bei der injektiven Abbildung $a \mapsto (a, 1)$. Dann ist A Normalteiler in $\mathrm{D}(A)$ und hat den Index 2.

---
[1] Ein * neben der Aufgaben-Nr. weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

(3) Wir bezeichnen mit D_n die *Symmetriegruppe* des regulären n-Ecks, betrachtet als Figur im 3-dimensionalen Raum. Damit meinen wir die Gruppe der Bewegungen, die diese Figur in sich überführen; jedes ihrer Elemente ist durch die Zuordnung der Ecken eindeutig bestimmt.
D_n ist isomorph zur Diedergruppe $\mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ der zyklischen Gruppe der Ordnung n (gewöhnlich wird D_n selbst als „Diedergruppe“ bezeichnet).

5. Rechnen mit Permutationen:

(1) Bestimmen Sie $\sigma \cdot \tau$ und $\tau \cdot \sigma$ für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,6\,3\,1\,4\,2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,3\,1\,2\,5 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie σ^{-1} und die Potenzen σ^n $(n \in \mathbb{N})$ der nachfolgend angegebenen Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 4\,3\,6\,5\,1\,2\,7 \end{pmatrix}.$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 4 zum 22.11.04

5. **Ergebnis.**

(1) Es ist
$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,1\,3\,5\,6\,4 \end{pmatrix}, \quad \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,5\,3\,6\,1\,4 \end{pmatrix}.$$

(2) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,6\,2\,1\,4\,3\,7 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,6\,2\,1\,4\,3\,7 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 5\,6\,2\,1\,4\,3\,7 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \end{pmatrix},$
$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 4\,3\,6\,5\,1\,2\,7 \end{pmatrix}, \ldots$