Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 5 zum 29.11.04

1. G sei eine Gruppe, H eine Untergruppe vom Index 2, d.h. eine Untergruppe, die genau zwei rechte Nebenklassen besitzt. Beweisen Sie: H ist Normalteiler in G.

2.* $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler. Mit $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ wird das „Produkt“ zweier Teilmengen $A, B \subseteq G$ bezeichnet. Dann gilt:
   (1) $H \cap N$ ist Normalteiler von H.
   (3) HN ist Gruppe und N ist Normalteiler in HN.
   (3) $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

3. Rechnen mit komplexen Zahlen:
   (1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i - 2,\ b = 3i - 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.
   (2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
   $$x^2 + ix - (15i + 3) = 0.$$
   (3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 16i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

4. Bestimmen Sie die Elemente x aus dem jeweils angegebenen Körper K, für die die angegebene Gleichung erfüllt ist.
   (1) $x^5 + x^4 + 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3,\ \mathbb{F}_7$)
   (2) $x^3 - 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3,\ \mathbb{Q},\ \mathbb{C}$)

5. Berechnen Sie für die gegebenen reellen Matrizen $A,\ B$ in jedem Fall $A + B,\ A - B,\ A \cdot B$ und $B \cdot A$, sofern die betreffende Operation definiert ist.

   (1) $$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (2) $$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[1] Ein * neben der Aufgaben-Nr. weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

(3) $$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 5 zum 29.11.04

3. **Lösung.**

(1) Es ist $a+b=i-3,\ a-b=-5i-1$ und $ab=-4i+8.$
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-2)\cdot(-3i-1)}{(3i-1)\cdot(-3i-1)}=\frac{8i-4}{10}=(\frac{4}{5}i-\frac{2}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x+\frac{1}{2}i)^2=(15i+\frac{11}{4})$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x+\frac{1}{2}i)^2=60i+11.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $60i+11$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi,$ daher

$$(u+vi)^2=60i+11$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad \begin{cases} u^2-v^2=11\\ \quad 2uv=60.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+6).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x+\frac{1}{2}i)=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-3i-3$ und $x_2=2i+3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

(3) Wir setzen $x=u+iv$ mit reellen Zahlen u, v. Die Gleichung $x^3=16i$ ist nun äquivalent zu

$$u^3+3u^2vi-3uv^2-v^3i=16i,$$

daher zu

$$\begin{cases} u^3-3uv^2=0\\ 3uv^2-v^3=16.\end{cases}$$

Im Fall $u=0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v=-2\cdot\sqrt[3]{2},$ wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u\neq 0,$ so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0, \text{ d.h. } (u+\sqrt{3}v)(u-\sqrt{3}v) = 0, \text{ also}$$
$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = 16, \text{ daher } v = \sqrt[3]{2}.$$

$x^3 = 16i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = -2\cdot\sqrt[3]{2}\,i$, $x = \pm\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}\,i$ ist.

5. **Ergebnis.**

(1) $$A+B = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -9 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -6 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -16 & -22 & -7 \\ 8 & 8 & 18 \\ 1 & 3 & 21 \end{pmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} 18 & -15 & 35 \\ -18 & 1 & -41 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

(2) $$A\cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

(3) $$A\cdot B = \begin{pmatrix} -14 \end{pmatrix}, \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 25 & -10 \\ -15 & -25 & 10 \\ 6 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Die übrigen Operationen sind nicht definiert.