Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 6 zum 6.12.04

1. Wir betrachten die Menge $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ aller reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{2}$ mit rationalen Zahlen a und b. Beweisen Sie:
   (1) Die Addition reeller Zahlen besitzt eine Einschränkung auf K, und K ist mit dieser Operation eine Gruppe.
   (2) Die Multiplikation reeller Zahlen besitzt eine Einschränkung auf die Teilmenge $K \setminus \{0\}$ von K, und $K \setminus \{0\}$ ist mit dieser Operation eine Gruppe.
   (3) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.

2. Sind Polynome Funktionen?
   Wir betrachten den dreielementigen Primkörper $K = \mathbb{F}_3$ und bilden den Polynomring $P := K[X]$ über K. Überprüfen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus durch
   $$\Phi : P \to \mathrm{Abb}(K, K)$$
   $$(\Phi(f))(\alpha) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in P,\ \alpha \in K$$
   einen Ringhomomorphismus Φ definiert und untersuchen Sie diesen auf Injektivität.

3. Bestimmen Sie $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(2; \mathbb{F}_5[X])$,
   $$A = \begin{pmatrix} -X^2 - 2X + 1 & X^2 + 2 \\ -1 & -2X - 2 \end{pmatrix},$$
   $$B = \begin{pmatrix} 2X^2 + 2X & -X^2 - 1 \\ X^2 + 2X + 2 & -2X^2 - 2X - 1 \end{pmatrix}.$$

4. Mit $I,\ J \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ bezeichnen wir die Matrizen $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften:
   (1) $I^4 = J^4 = \mathrm{E}_2$ und $J \cdot I = I^3 \cdot J$.
   (2) $Q_8 := \{J^n \cdot I^m \mid n = 0, \ldots, 3,\ m = 0, 1\}$ ist eine Gruppe mit 8 Elementen (die *Quaternionengruppe*).

5*. R sei ein Ring, $R^{[1]}$ der Polynomring in einer Unbestimmten über R sowie $X, Y \in R^{[1]}$ Unbestimmte, $R[X] = R[Y] = R^{[1]}$.
   (1) Gilt für $f \in R^{[1]}$ stets $\deg_X(f) = \deg_Y(f)$?
   (2) Beantworten Sie die Frage unter (1) für den Fall, dass R ein Körper ist.

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 6 zum 6.12.04

3. **Ergebnis.**

$$A + B = \begin{pmatrix} X^2 + 1 & 1 \\ X^2 + 2X + 1 & -2X^2 + X + 2 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2X^2 + X + 1 & 2X^2 - 2 \\ -X^2 - 2X + 2 & 2X^2 - 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -X^4 + X^3 + 2X^2 + X - 1 & -X^4 - 2X + 2 \\ -2X^3 + 2X^2 + 1 & -X^3 - X^2 + X - 2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -2X^4 - X^3 - X^2 + 2X + 1 & 2X^4 - X^3 + X^2 + X + 2 \\ -X^4 + X^3 + 2X^2 - 2 & X^4 + X^3 + 2X^2 + 1 \end{pmatrix}.$$