Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 8 zum 3.1.05

1. Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$-ix_1 - ix_2 - 2ix_3 = 1$$
$$-2ix_2 + (i-1)x_3 = i$$

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$, wobei die Koeffizienten durch die Struktur von $\mathbb{F}_7$ als $\mathbb{Z}$-Algebra gegeben sind.

$$\begin{aligned} -83x_1 + 95x_2 - 14x_3 - 49x_4 &= -72 \\ 20x_2 + 36x_3 - 17x_4 &= 10 \\ 59x_1 + 60x_2 + 38x_3 - 44x_4 &= -71 \\ -58x_1 - 99x_2 - 83x_3 - 51x_4 &= -88 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie für eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem:

$$x_1 + 2cx_2 + (c+3)x_3 = -(c-2)$$
$$-x_1 - (c-1)x_2 - 2x_3 = (c-4)$$

4. Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ jeweils die Anzahl der Lösungen (x, y, z) des linearen Gleichungssystems

$$x + wy = 1$$
$$wx + 3y = 2$$
$$2y + wz = 3,$$

wobei w eine der folgenden drei Zahlen ist.

(1) $w = \sqrt{3}$,

(2) $w = 1,7320508075688772935274463415058723669428$,

(3) $w = 0$.

5. Eine Nachricht wird in der folgenden Weise verschlüsselt, indem zunächst Buchstaben auf Elemente des Primkörpers $\mathbb{F}_{29}$ abgebildet werden.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	,	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

Die entstandenen Ziffern werden als Folge von Zahlenpaaren angeordnet (wobei ggf. am Ende der Nachricht ein Leerzeichen einzufügen ist, damit eine gerade Anzahl von Buchstaben entsteht). Nun bezeichne A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{M}(2; \mathbb{F}_{29})$; die zugehörige Abbildung $\mathbb{F}_{29}^2 \to \mathbb{F}_{29}^2$ bildet die Paare der Folge auf neue Paare ab.

Als verschlüsselte Nachricht bezeichnen wir denjenigen Text, der der Folge der Bilder der Zahlenpaare entspricht.

Eine Nachricht wurde unter Verwendung der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ verschlüsselt und lautet jetzt „OUKPDHTBDGRG“. Finden Sie die Nachricht.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 8 zum 3.1.05

1. **Lösung.** Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3 = 2t \in \mathbb{C}$ ein. (Wir hätten natürlich auch $x_3 = t$ wählen können; durch den Trick wollen wir uns das Rechnen mit einigen Brüchen ersparen. Wir finden einen geeigneten Faktor, indem wir die Koeffizienten der „Stufenvariablen" betrachten.) Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$x_2 = (i+1)t - \frac{1}{2}$, sowie durch Einsetzen in die erste

$x_1 = -(i+5)t + (i + \frac{1}{2})$, folglich

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= (-(i+5)t + (i+\tfrac{1}{2}), (i+1)t - \tfrac{1}{2}, 2t)\\ &= ((i+\tfrac{1}{2}), -\tfrac{1}{2}, 0) + t\cdot(-(i+5), (i+1), 2).\end{aligned}$$

Wir haben eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden und erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\left\{ ((i+\tfrac{1}{2}), -\tfrac{1}{2}, 0) + t\cdot(-(i+5), (i+1), 2) \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

2. **Lösung.** Nach geeigneter Reduktion der Koeffizienten $\bmod(7)$ erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -2\\ -x_2 + x_3 - 3x_4 &= 3\\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -1\\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3\end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3 & -2 & -1\\ -2 & -1 & 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

des Systems wird mit dem gaußschen Algorithmus umgeformt; wir erhalten die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 1 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

eines äquivalenten Systems. Daraus ergibt sich leicht $\{(-1, -2, 2, -2)\}$ als Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

3. **Lösung.** Durch eine einfache Zeilenoperation erhalten wir ein äquivalentes System in Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + 2cx_2 + (c+3)x_3 &= -(c-2)\\ (c+1)x_2 + (c+1)x_3 &= -2\end{aligned}$$

Daraus sind die Lösungsmengen leicht abzulesen, dies sind falls $c \neq -1$

$$\left\{ \left(\frac{-(c^2-5c-2)}{(c+1)}, \frac{-2}{(c+1)}, 0 \right) + t \cdot ((c-3), -1, 1) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie für $c = -1$ die leere Menge.

5. **Lösung.** Zunächst stellen wir die Zuordnung der Buchstaben zu den Elementen von $\mathbb{F}_{29}$ her und erhalten die folgende Liste von Paaren

$$(14, 20), (10, 15), (3, 7), (19, 1), (3, 6), (17, 6).$$

Durch Multiplikation der Transponierten der Paare p mit der Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. durch ${}^{t}p \mapsto A^{-1} \cdot {}^{t}p$ erhalten wir die gesuchten Urbilder, das erste entsteht beispielsweise durch

$$\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die Resultate werden wiederum als Liste von Paaren aus $\mathbb{F}_{29}^2$ angeordnet; es ergibt sich

$$(7, 8), (11, 5), (4, 28), (19, 8), (13, 0), (26, 28).$$

Wir stellen gemäß der Tabelle die Zuordnung zu den Buchstaben her und erhalten die unverschlüsselte Nachricht

„HILFE TINA- “.