## Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

### Serie 9 zum 10.1.05

1. Für die nachfolgend angegebenen Matrizen sind die Inversen zu bestimmen;

(1) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & -5 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3),$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} (i-2) & -(i+1) \\ -2 & -i \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{C}).$$

2. Bestimmen Sie jeweils die inverse Matrix, sofern diese existiert.

(1) $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R}),$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R}) \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

3. Wir untersuchen Eigenschaften von Matrizen:
   (1) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M(n; K)$, in der eine Zeile oder eine Spalte nur aus Nullen besteht, nicht invertierbar sein kann.
   (2) Geben Sie ein Beispiel einer nicht invertierbaren Matrix $A \in M(n; K)$ an, in der keine Zeile und keine Spalte nur aus Nullen besteht.
   (3) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix $A$ invertierbar? Geben Sie in diesem Fall die Inverse von $A$ an,
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ t & 1 & t \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $K$ sei ein Körper der Charakteristik $0$. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$ heißt *nilpotent*, falls eine natürliche Zahl $t$ existiert, für die $A^t$ die Nullmatrix ist. Wir definieren die Exponentialfunktion für eine solche Matrix als
   $$\exp(A) := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{1}{\nu!} A^\nu$$
   (wobei diese Summe durch die – endlich vielen – von $0$ verschiedenen Summanden definiert ist und $A^0 := \mathrm{E}_n$ gesetzt wird).
   (1) Beweisen Sie: Sind $A$, $B \in \mathrm{M}(n; K)$ nilpotent und ist $A \cdot B = B \cdot A$, so ist auch $A + B$ nilpotent und es gilt $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

(2) Für jede nilpotente Matrix $A$ ist $\exp(A)$ invertierbar; geben Sie eine Formel für die inverse Matrix $\exp(A)^{-1}$ an.

(3) $A \in \mathrm{M}(n; K)$ sei eine untere Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonale nur aus Nullen besteht. Zeigen Sie, dass $A$ nilpotent ist.

(4) Bestimmen Sie $\exp(A)$ und $\exp(A)^{-1}$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{Q}).$$

**Warnung.** Eine sinnvolle Verallgemeinerung auf beliebige quadratische Matrizen erfordert einen Körper $K$, in dem ein geeigneter Konvergenzbegriff erklärt werden kann.

5*. $L := \mathrm{GL}(n; K)$ bezeichnet die allgemeine lineare Gruppe über einem gegebenen Körper $K$.

(1) Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $\varphi : L \to L$, $A \mapsto ({}^{\mathrm{t}}A)^{-1}$ ist ein Automorphismus der Gruppe $L$.

b) Für ein beliebiges Element $G \in L$ gilt:
$\psi_G : L \to L$, $A \mapsto G^{-1} \cdot A \cdot G$ ist ein Automorphismus.
Die Automorphismen $\psi_G$ werden nachfolgend *innere Automorphismen* der Gruppe $L$ genannt.

(2) Wir wählen $K = \mathbb{F}_p$ als Primkörper der Charakteristik $p$ und untersuchen die zuvor unter a) definierte Abbildung $\varphi$, die nun mit

$$\varphi_{n,p} : \mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_p) \to \mathrm{GL}(n; \mathbb{F}_p)$$

bezeichnet wird.
Für welche Primzahlen $p$ existiert ein innerer Automorphismus $\varphi_{n,p}$? Kann in einem dieser Fälle $n > 1$ sein?

**Lineare Algebra und analytische Geometrie I***
**Lösungsblatt der Aufgabenserie 9 zum 10.1.05**

1. **Ergebnis.** Unter (1) erhalten wir aus der Matrix $A$ durch Reduktion $\bmod(3)$
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Wir formen $(A, \mathrm{E}_3)$ zeilenäquivalent in die Matrix $(\mathrm{E}_3, A^{-1})$ um und erhalten dabei
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Im Fall (2) ergibt sich entsprechend
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} i & -(i+1) \\ -2 & -(i-2) \end{pmatrix}.$$

2. **Ergebnis.**
(1) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R}).$$
(2) Für $a \cdot b \cdot c = 0$ ist die Matrix $B$ nicht invertierbar. Anderenfalls erhalten wir
$$B^{-1} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & -a & ab \end{pmatrix}.$$

3. **Ergebnis.** Wir geben das Resultat für (3) an.
1. Fall, $t = 0$: $A$ ist nicht invertierbar.
2. Fall, $t \neq 0$: $$A^{-1} = \frac{1}{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -t \\ 0 & -t & t^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$