

# Übungsaufgaben<sup>1</sup> Lineare Algebra und analytische Geometrie I\*

## Serie 10 zum 17.1.05

1. Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 45 \\ -28 & -42 \end{pmatrix}$$

über dem endlichen Primkörper  $\mathbb{F}_{97}$ .

- 2.\* (1) Finden Sie die Bruhat Zerlegung der nachfolgend angegebenen Matrix  $A$  als Produkt  $A = Q \cdot P \cdot A'$  einer oberen Dreiecksmatrix  $Q$  mit Einsen auf der Hauptdiagonale, einer Permutationsmatrix  $P$  sowie einer oberen Dreiecksmatrix  $A'$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M(3; \mathbb{R})$$

- (2) Bestimmen Sie die entsprechende Zerlegung für

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2; \mathbb{R}) \quad \text{mit } ad \neq bc \text{ und } c \neq 0.$$

3. Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$f = X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X,$$

$$g = X^6 + 15X^5 + 79X^4 + 195X^3 + 262X^2 + 168X$$

aus  $K[X]$ , falls  $K$  einer der folgenden Körper ist:

- (1)  $K = \mathbb{R}$ ,
- (2)  $K = \mathbb{F}_3$ ,
- (3)  $K = \mathbb{F}_2$ .

4. Für welche Zahlen  $t \in \mathbb{R}$  besitzen die Polynome

$$f = X^4 - (t^2 + 3t + 7)X^2 - (t^2 - t - 10)X - (3t + 2),$$

$$g = X^3 + (t + 2)X^2 + (t - 3)X + 3$$

aus dem Ring  $\mathbb{R}[X]$  einen nichtkonstanten gemeinsamen Teiler?

5. Wir betrachten die folgenden Polynome aus den Polynomringen über den angegebenen Körpern. Zerlegen Sie diese in irreduzible Faktoren.

(1)  $X^3 + 2X^2 + 2X - 2 \in \mathbb{F}_5[X]$ ,

(2)  $X^4 + X^3 + X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$ ,

(3)  $2X^4 - 3X^3 - 20X^2 - 4X + 16 \in \mathbb{C}[X]$ ,

(4)  $X^5 - 9X^3 - 7X^2 + 63 \in \mathbb{R}[X]$ ,

(5)\*  $X^{p-1} - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$  ( $p$  bezeichnet eine Primzahl).

<sup>1</sup> Ein \* weist auf eine fakultative Aufgabe hin.



**Lineare Algebra und analytische Geometrie I\***  
**Lösungsblatt der Aufgabenserie 10 zum 17.1.05**

1. **Lösung.** Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise  $(A, E_2)$  durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix  $(E_2, A')$  umformen. Ist dies möglich, so gilt  $A' = A^{-1}$ . Dabei werden wir unter Vermeidung von Divisionen zunächst eine Matrix  $(D, A'')$  erzeugen, wobei  $D$  eine Diagonalmatrix ist. Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} -3 & 45 & 1 & 0 \\ -28 & -42 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich schrittweise

$$\begin{pmatrix} -3 & 45 & 1 & 0 \\ 0 & 28 & 28 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 29 & 38 \\ 0 & 28 & 28 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit  $D^{-1}$  führt nun auf die Lösung. Dazu müssen wir die Zahlen  $-3$  und  $28$  in  $\mathbb{F}_{97}$  invertieren. Wegen  $32 \cdot (-3) = 1$  ist  $-3^{-1} = 32$ . Um  $28$  zu invertieren, wird der euklidische Algorithmus (vgl. 1/2/26) mit den Zahlen  $97$  und  $28$  im Ring  $\mathbb{Z}$  ausgeführt, wobei der größte gemeinsame Teiler (d.h. die Zahl  $1$ ) als Vielfachensumme der Ausgangszahlen dargestellt wird. Wir setzen  $r_{-1} := f$  und  $r_0 := g$ . Für  $i > 0$  wird mit  $r_i$  der Rest bei der  $i$ -ten Division bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$97 : 28 = 3 \text{ Rest } 13$	$r_{-1} - 3 \cdot r_0 = r_1$	$r_1 = f - 3g$
$28 : 13 = 2 \text{ Rest } 2$	$r_0 - 2 \cdot r_1 = r_2$	$r_2 = -2f + 7g$
$13 : 2 = 6 \text{ Rest } 1$	$r_1 - 6 \cdot r_2 = r_3$	$r_3 = 13f - 45g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus. In der zweiten Spalte sind die Regeln zur Bildung der letzten Spalte angegeben. Diese entsteht durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen. So ergibt sich

$$1 = 13f - 45g.$$

In  $\mathbb{F}_{97}$  ergibt sich (vgl. 1/2/29)

$$-45 = 28^{-1}.$$

Multiplikation der zuletzt gefundenen Matrix mit  $D^{-1}$  ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -42 & -45 \\ 0 & 1 & 1 & 38 \end{pmatrix},$$

daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -42 & -45 \\ 1 & 38 \end{pmatrix}.$$

- 2.\* **Ergebnis.** Wir geben die Zerlegung im Fall (1) an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{6}{11} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{11} \end{pmatrix}$$

3. **Ergebnis.** Als größte gemeinsame Teiler erhalten wir

$$(1) \text{ ggT}(f, g) = X^3 + 2X^2 + 3X \in \mathbb{R}[X],$$

$$(2) \text{ ggT}(f, g) = X^4 - X^2 \in \mathbb{F}_3[X],$$

$$(3) \text{ ggT}(f, g) = X^4 + X^3 + X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X].$$

4. **Lösung.** Wir führen den euklidischen Algorithmus für  $f$  und  $g$  aus; als erste Reste ergeben sich

$$r_1 = X + 4 \quad \text{und} \quad r_2 = (12t - 17).$$

$r_2(t) = 0$  ist hier (wegen  $\deg_X(r_2(t)) \leq 0$ ) notwendig und hinreichend dafür, dass  $r_1$  größter gemeinsamer Teiler der Polynome  $f$  und  $g$  ist, anderenfalls gilt  $\text{ggT}(f, g) = 1$ . Die Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen gemeinsamen Teilers lautet daher  $12t - 17 = 0$ .

5. **Ergebnis.** Mit  $f$  bezeichnen wir das jeweilige Polynom.

(1)  $f$  ist unzerlegbar,

(2)  $f = X \cdot (X + 1)^3$ ,

(3)  $f = (2X^2 + X - 2) \cdot (X - 4) \cdot (X + 2)$ ,

(4)  $f = (X^3 - 7) \cdot (X + 3) \cdot (X - 3)$ .