Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 11 zum 24.1.05

1. Es sei $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (dann ist $\omega^3 = 1$ und $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Zeigen Sie, dass der Erweiterungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega] = (\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])[\omega]$ von $\mathbb{Q}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:
   (1) Alle Nullstellen von $X^3 - 2$ liegen in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$.
   (2) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$ ist der kleinste Erweiterungskörper mit der Eigenschaft (1), d.h. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$ ist Zerfällungskörper von $X^3 - 2$.

2. (1) Im reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ bezeichne U die Menge aller (x, y, z) mit
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$
   Zeigen Sie, dass U ein Unterraum ist.
   (2) W sei die Menge aller (x, y, z) mit
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$
   Zeigen Sie, dass W kein Unterraum ist!
   (3) $L \subseteq K^n$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$
   über dem Körper K. Zeigen Sie, dass L genau dann ein Unterraum des Standardraumes K^n über K ist, wenn das obige System homogen ist (d.h. $b_1 = \ldots = b_m = 0$).

3. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen a_n. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die betreffende Teilmenge einen Unterraum bildet.
   (1) $U_1 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0\}$
   (2) $U_2 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 1\}$
   (3) $U_3 := \{(a_n) \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 1\}$
   (4) $U_4 := \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ konvergiert}\}$
   (5) $U_5 := \{(a_n) \in V \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+1} \text{ für } n \geq n_0\}$.

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

4. Im Standardvektorraum $V = K^3$ über dem Körper K betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 |\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$
$$U_2 = K \cdot (1,1,1) := \{t \cdot (1,1,1) |\ t \in K\}.$$

Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist $U_1 + U_2 = V$. Gilt dies auch im Falle $K = \mathbb{F}_3$?

5. V sei ein K-Vektorraum und $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Wir definieren eine Abbildung $f : K^n \to V$ durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

Zeigen Sie:

(1) f ist eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet.