Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 12 zum 31.1.05

1. Im Standardvektorraum $V = K^3$ über dem Körper K betrachten wir die Unterräume

   $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 |\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$,

   $U_2 = K \cdot (1,1,1) := \{t \cdot (1,1,1) |\ t \in K\}$.

   Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist $U_1 + U_2 = V$. Gilt dies auch im Falle $K = \mathbb{F}_3$?

2. Im Standardraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren $\boldsymbol{x} = (1,1,1,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{z} = (1,3,1,2)$. Mit $U := \mathbb{R}\boldsymbol{x} + \mathbb{R}\boldsymbol{y} + \mathbb{R}\boldsymbol{z}$ bezeichnen wir den von ihnen erzeugte Unterraum und setzen weiter $V := \mathbb{R}\boldsymbol{x} + \mathbb{R}\boldsymbol{y}$.

   (1) Entscheiden Sie, welche der folgenden Beziehungen gilt:

   a) $U = \mathbb{R}x \bigoplus \mathbb{R}y$

   b) $U = \mathbb{R}x \bigoplus \mathbb{R}z$

   c) $U = V \bigoplus \mathbb{R}z$

   (2) Finden Sie einen Unterraum W mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{R}^4 = U \bigoplus W$ ist!

3. $\varphi : V \to W$ sei ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen. Wir definieren für beliebige K-Vektorräume Z eine Abbildung

   $\Phi_Z : \mathrm{Hom}_K(Z, V) \to \mathrm{Hom}_K(Z, W)$

   durch $\Phi_Z(\sigma) := \varphi \cdot \sigma$. Zeigen Sie, dass dann auch Φ_Z ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen ist.

4.* Wir betrachten eine Folge

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

   linearer Abbildungen von K-Vektorräumen mit der Eigenschaft, dass das Bild jedes auftretenden Homomorphismus gleich dem Kern des nachfolgenden ist (d.h. es liegt eine *exakte Folge* vor). Beweisen Sie, dass V zu $V' \bigoplus V''$ isomorph ist.

5. U, U_1 und U_2 seien Unterräume des Vektorraumes V und $U_1 \subseteq U_2$. Beweisen Sie:

   (1) $(U_2 \cap U)/(U_1 \cap U)$ ist isomorph zu einem Unterraum von U_2/U_1.

   (2) $(U_2 + U)/(U_1 + U)$ ist isomorph zu einem Faktorraum von U_2/U_1.

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm