Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 13 zum 7.2.05

1. Wir betrachten die Vektoren
   (1) $(-2,-1,0),\ (1,1,2),\ (0,1,-1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,
   (2) $(-1,0,1),\ (1,0,-1),\ (1,-1,0)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,
   (3) $(2,2,0,1),\ (-1,1,-2,0),\ (2,1,-2,0)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$,
   (4) $\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,
   (5) $(1,(i-2)),\ (-(i-2),-i)$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,
   (6)* $\ln(2),\ \ln(3)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

   Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem bzw. ein linear unabhängiges System bilden.

2. Prüfen Sie, ob die Vektoren $(-(i-3),-(i-3)),\ ((7i-1),(7i-1)) \in \mathbb{C}^2$ linear unabhängig sind, wenn
   (1) $\mathbb{C}^2$ als Standardvektorraum über $\mathbb{C}$ bzw.
   (2) $\mathbb{C}^2$ mittels der Inklusion $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$

   betrachtet wird.

3. Es sei $(\boldsymbol{v}_i)_{i\in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ des K-Vektorraumes V. Wir setzen voraus, dass die Indexmenge I mindestens zwei Elemente hat. Beweisen Sie die folgende Behauptung.

   Es existieren ein $i \in I$ sowie Zahlen $a_j \in K$, $a_j = 0$ für fast alle $j \in I$, so dass $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j\in I-\{i\}} a_j \boldsymbol{v}_j$ ist.

4. Nachfolgend ist in jedem Fall ein Vektorraum V mit einer Familie $\mathcal{B}$ von Vektoren gegeben. Prüfen sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $\boldsymbol{x} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$.
   (1) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ im Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ sowie $\boldsymbol{x} = (-1,-3,2)$.
   (2) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,-1)$ und $\boldsymbol{x} = (-2,-2,2)$.
   (3) V sei der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$, sowie $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,1,0))$, $\boldsymbol{x} = (1,0,1)$.
   (4) $V = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ sei der von $\{1, \sqrt{2}\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{B} := (3, \sqrt{2})$ sowie $\boldsymbol{x} = (1+\sqrt{8})^2$.

---

[1] Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

5. Wir betrachten den Untervektorraum $\mathrm{P}_2 \subseteq \mathbb{R}[X]$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Polynome über dem Körper der reellen Zahlen, der durch die Polynome vom Grad ≤ 2 gebildet wird. Zeigen Sie, dass $(2, X-2, X^2-X+1)$ eine Basis von P_2 ist und bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms $f = -3X + 2$ bezüglich dieser Basis.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 13 zum 7.2.05

1. **Ergebnis.** Die angegebenen Vektoren sind
   (1) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem,
   (2) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (3) linear unabhängig, kein Erzeugendensystem,
   (4) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,
   (5) linear unabhängig und Erzeugendensystem,
   (6) linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

2. **Ergebnis.**
   (1) Die Vektoren sind linear abhängig.
   (2) Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil induziert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}^2$ und $\mathbb{R}^4$. Wir ordnen beispielsweise $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ den Vektor $(\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Im}(\beta)) \in \mathbb{R}^4$ zu. Dann entsprechen die gegebenen Vektoren
   $$(3, -1, 3, -1),\ (-1, 7, -1, 7) \in \mathbb{R}^4$$
   und sind daher linear unabhängig.

4. **Ergebnis.**
   (1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis (kanonische Basis des gegebenen Standardraumes). Die gesuchten Koordinaten sind $(-1, -3, 2)$.
   (2) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(-2, 0, 0)$.
   (3) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(0, 1, 1)$.
   (4) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(3, 4)$.

5. **Ergebnis.** Die Darstellung von f als Vielfachensumme der gegebenen Polynome führt nach Koeffizientenvergleich auf ein leicht zu lösendes lineares Gleichungssystem. Wir erhalten hat die Koordinaten $(-2, -3, 0)$.