Übungsaufgaben[1] Lineare Algebra und analytische Geometrie I*

Serie 14 zum 14.2.05

1. Im Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = (-2,2,2,-1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,-2,-1,2),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (-2,-2,-1,1), \quad \boldsymbol{v}_4 = (1,-1,1,0) \text{ und}$$
$$\boldsymbol{w}_1 = (1,-1,2,-2), \quad \boldsymbol{w}_2 = (0,-1,0,-2).$$

   (1) Überprüfen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis bilden und $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ linear unabhängig sind.

   (2) Verwenden Sie das Austauschverfahren zur Bestimmung einer Basis der Gestalt $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2})$.

2. Im Standardvektorraum $V = R^4$ sei durch $U := \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{a} + \mathbb{R}\cdot\boldsymbol{b}$ ein Unterraum gegeben mit $\boldsymbol{a} = (-1,2,0,-2)$, $\boldsymbol{b} = (0,0,-2,2)$.

   (1) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = (2,-2,-2,-1) \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = (1,0,0,-5)$$

   dieselbe Klasse im Faktorraum V/U haben.

   (2) Geben Sie eine Basis für V/U an.

   (3) Geben Sie die Klasse des Vektors von $\boldsymbol{v} = (1,-1,-2,0)$ als Vielfachensumme der Vektoren der unter (2) gefundenen Basis an!

3. Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3^5 \to \mathbb{F}_3^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist.

4.** Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ der von 0 verschiedenen komplexen Zahlen und die Untergruppe $S^1 := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$; Gruppenoperation ist in beiden Fällen die Multiplikation komplexer Zahlen. Beweisen Sie: Die Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(S^1, \cdot)$ sind isomorph.

   Anleitung zum Beweis. Ein Isomorphismus $\mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\overset{\cong}{\to}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lässt sich so wählen, dass $1 \in \mathbb{R}$ auf $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ abgebildet wird. Wir vergessen die Vektorraumstrukturen und erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen:

---

[1] Ein * weist auf eine fakultative Aufgabe hin.
Entnommen aus M. Roczen, H. Wolter, W. Pohl, D. Popescu, R. Laza: Lineare Algebra individuell
Online-Version: http://www.math.hu-berlin.de/~roczen/software/la.htm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
\{0\} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

5. Im K-Vektorraum $V := \mathrm{M}(n; K)$ wählen wir eine Matrix A.
   (1) Zeigen Sie, dass die durch $\Psi(X) := X \cdot A - A \cdot X$ definierte Abbildung $\Psi : V \to V$ linear ist.
   (2) Nun sei $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
   Geben Sie eine Basis für $\ker(\Psi)$ an.

Lineare Algebra und analytische Geometrie I*
Lösungsblatt der Aufgabenserie 14 zum 14.2.05

1. **Lösung.** Mit A bezeichnen wir die Matrix, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ gebildet werden,
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Durch Zeilenoperationen wird diese leicht in die Matrix
$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
überführt, die offensichtlich 4 Stufen und daher den vollen Rang $4 = \operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(A)$ hat. Daher ist $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$.
Nun fügen wir zu A auf der linken Seite die durch $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$ gebildeten Spalten hinzu und führen wiederum Zeilenoperationen aus, die diese Matrix in Zeilenstufenform transformieren,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 45 & 7 \end{pmatrix}.$$
Dann bilden die Spalten der ersten Matrix, deren Positionen durch die Stufenindizes der zweiten gegeben sind, eine Familie linear unabhängiger Vektoren. Insbesondere bilden die ersten beiden Spalten und damit $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ ein linear unabhängiges Paar. Wir erhalten die Basis
$$((1, -1, 2, -2), (0, -1, 0, -2), (-2, 2, 2, -1), (1, -2, -1, 2)).$$

2. **Ergebnis.**
   (1) Es ist $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (-1, 2, 2, -4) = 1 \cdot (-1, 2, 0, -2) - 1 \cdot (0, 0, -2, 2) \in U$, daher $\overline{\boldsymbol{v}}_1 = \overline{\boldsymbol{v}}_2 \in V/U$.
   (2) Die Klassen der Vektoren: $\boldsymbol{c} = (1, 0, 0, 0)$ und $\boldsymbol{d} = (0, 1, 0, 0)$ bilden eine Basis $(\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{d}})$ in V/U.
   (3) Es gilt $\overline{\boldsymbol{v}} = 2 \cdot \overline{\boldsymbol{c}} - 3 \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$.

3. **Lösung.** Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich
$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$
daher $\dim(\ker(\varphi)) = 2$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 3$.

5. **Lösung.** Wir bestimmen das Resultat zu (2). Dazu schreiben wir die Bedingung

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad X \cdot A - A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als lineares Gleichungssystem für die Zahlen $x_1, \ldots, x_4$ auf und erhalten:

$$-x_3 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 - x_4 = 0$$

$$4x_3 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Das übliche Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme liefert nun die Menge aller Lösungen; insbesondere hat $\ker(\Psi)$ die Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$