Adjungierte Funktoren

Während Äquivalenz von Kategorien eher selten auftritt, erweist sich die folgende, schwächere Bedingung als praktisch nützlich.
Die Funktoren $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $T : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißen *adjungiert*, wenn im folgenden Sinn eine natürliche Äquivalenz der Morphismenfunktoren in die Kategorie (**sets**) besteht.

Definition. Eine *Adjunktion des Paares* (S, T) ist eine Vorschrift, die allen Objekten $A \in \mathcal{C}$ und $B \in \mathcal{D}$ eine bijektive Abbildung

$$\Phi_{A,B} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A), B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, T(B))$$

zuordnet, die in A, B natürlich ist, d.h. für Morphismen $f : A_1 \to A_2$ aus $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ und $g : B_1 \to B_2$ aus $\mathrm{Mor}(\mathcal{D})$ sind die folgenden Diagramme stets kommutativ:

Prüfen Sie: Falls S und T eine Äquivalenz der Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ vermitteln, so sind sie adjungiert.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A_1), B) \arrow[r, "\Phi_{A_1,B}"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_1, T(B)) \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A_2), B) \arrow[r, "\Phi_{A_2,B}"] \arrow[u, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(f),B)"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A_2, T(B)) \arrow[u, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,T(B))"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A), B_1) \arrow[r, "\Phi_{A,B_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A),g)"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, T(B_1)) \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,T(g))"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A), B_2) \arrow[r, "\Phi_{A,B_2}"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, T(B_2))
\end{tikzcd}$$

Die Funktoren S, T werden dann auch *zueinander adjungiert* genannt, genauer S *linksadjungiert zu* T und T *rechtsadjungiert zu* S.

Interpretation. Die Adjunktion Φ definiert eine natürliche Transformation

$$\varepsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T \cdot S,$$

die für Objekte $A \in \mathcal{C}$ durch das Bild

ε heißt auch *Einheit* der Adjunktion.

$$\varepsilon_A := \Phi_{A,S(A)}(\mathrm{id}_{S(A)}) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}\big(A, T \cdot S(A)\big)$$

gegeben wird. Ist nun B ein Objekt von $\mathcal{D}$ und $f : A \to T(B) \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ein Morphismus, so existiert genau ein Morphismus $f^{\#} : S(A) \to B$ mit $\Phi_{A,B}(f^{\#}) = f$; wir erhalten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) \ni \mathrm{id}_A \arrow[d, "S"'] & \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A), S(A)) \arrow[r, "\Phi_{A,S(A)}"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A),f^{\#})"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, TS(A)) \ni \varepsilon_A \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,T(f^{\#}))"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(S(A), B) \arrow[r, "\Phi_{A,B}"] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, T(B)) \ni f
\end{tikzcd}$$

Verfolgen wir id_A durch das Diagramm, so erhalten wir, dass $f : A \to T(B)$ sich mit dem eindeutig bestimmten Morphismus $f^{\#}$ so faktorisieren lässt, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[dr, "f"'] & TS(A) \arrow[d, "T(f^{\#})"] \\ & T(B) \end{tikzcd}$$

Tatsächlich lässt sich obige Definition auch mittels der natürlichen Transformation ε und dieser Kommutativitätseigenschaft formulieren.

Übungsaufgabe!

Beispiele. K sei ein Körper.

1. Durch $S : (\mathbf{set}) \to (\mathbf{vect}_K)$ mit $S(X) := K^{(X)}$ wird ein Funktor definiert, indem einer Abbildung $f : X \to Y$ die lineare Abbildung $\varphi : K^{(X)} \to K^{(Y)}$ zugeordnet wird, die das Element $x \in X$ der kanonischen Basis von $K^{(X)}$ auf das Element $f(x) \in Y$ der kanonischen Basis von $K^{(Y)}$ abbildet (das Prinzip der linearen Fortsetzung sichert Existenz und Eindeutigkeit von φ).
   Mit $T : (\mathbf{vect}_K) \to (\mathbf{set})$ bezeichnen wir den Vergiss-Funktor, der einem Vektorraum seine zugrundeliegende Menge und einer linearen Abbildung die entsprechende Abbildung von Mengen zuordnet.
   Dann ist durch
   $$\Phi_{X,V} : \mathrm{Hom}_K(S(X), V) \to \mathrm{Abb}(X, T(V))$$
   eine Adjunktion der Funktoren S und T gegeben, wenn $\Phi_{X,V}(\varphi)$ als Komposition $\varphi \cdot j$ der Abbildung φ mit der Inklusion $j : X \to K^{(X)}$ gewählt wird.

Erinnern Sie sich daran, dass die natürliche Abbildung $X \to K^{(X)}$ stets als Inklusion verstanden wird.

Natürlich ist die Kommutativität entsprechender Diagramme zu prüfen!

2. $W \in (\mathbf{vect}_K)$ bezeichnet einen Vektorraum. Die Funktoren
   $$V \mapsto V \otimes_K W$$
   $$P \mapsto \mathrm{Hom}_K(W, P)$$
   der Kategorie der K-Vektorräume in sich bilden ein adjungiertes Paar; die Adjunktion
   $$\mathrm{Hom}_K(V \otimes_K W, P) \to \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, P))$$
   ist sogar durch Isomorphismen von Vektorräumen gegeben (vgl. [RW] 4/4/6). Diese Eigenschaft wurde in der linearen Algebra *adjungierte Assoziativität* genannt.

Die Vorschrift für die Zuordnung der Homomorphismen ist auf naheliegende Weise zu definieren.